

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

Bis repetita placent.

- 1 – Espaces vectoriels
- 2 – Sous-espaces vectoriels
- 3 – Combinaisons linéaires (finies), familles génératrices
- 4 – Applications linéaires
- 5 – Noyau et image d’une application linéaire
- 6 – Isomorphismes et automorphismes
- 7 – Sommes directes et sev supplémentaires
- 8 – Projecteurs (et symétries)

Chapitre 21 : Fractions rationnelles

Dans ce chapitre encore, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Généralités

Définition de fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{K}$. On note : $\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{P}{Q}, (P, Q) \in \mathbb{K}[X], Q \neq 0 \right\}$. La fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est irréductible lorsque $P \wedge Q = 1$.

Le degré de la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ est : $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$. Le degré dans $\mathbb{K}(X)$ possède les mêmes propriétés que le degré dans $\mathbb{K}[X]$ (principalement : le degré d’un produit est la somme des degrés ; le degré d’une somme est majoré par le max).

Somme et produit de deux fractions rationnelles. $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps (le corps des fractions rationnelles...).

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle irréductible. Un zéro de F est un scalaire α qui est racine de P . Un pôle de F est un scalaire de F qui est racine de Q . Définitions de zéro et de pôle de multiplicité p .

2 – Partie entière et partie polaire d’une fraction rationnelle

Théorème : pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

Définitions : le polynôme E du théorème est alors appelé partie entière de F , et la fraction rationnelle G partie polaire de F .

3 – Décomposition en éléments simples

Au-delà des théorèmes assurant l’existence et l’unicité d’une décomposition en éléments simples d’une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$ ou de $\mathbb{R}(X)$, il faut surtout retenir les méthodes pratiques pour obtenir de telles décompositions : méthodes d’identification (à utiliser exceptionnellement, ou in articulo mortis), de “multiplication-évaluation”, de “multiplication-limite”, et la propriété ci-dessous à utiliser pour les pôles simples.

Propriété : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, et α un pôle simple de F . Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \frac{\lambda}{X - \alpha}$, où G est une fraction rationnelle n’admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

QUESTIONS DE COURS

- **Propriété (partie entière, partie polaire)** : Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple (E, G) avec $E \in \mathbb{K}[X]$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ de degré < 0 tel que : $F = E + G$.

- **Exercice** : décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X(X-1)^2}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

- **Exercice** : décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^3 - X}$ dans $\mathbb{K}(X)$.

- **Exercice** : décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^3 - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$, puis dans $\mathbb{R}(X)$.

- **Exercice** : décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Les 3 questions de cours ci-dessous sont sur le principe du volontariat

- **Propriété** : soit $F \in \mathbb{K}(X)$, et soit α un pôle de multiplicité p de F . Il existe un unique couple (R, G) avec $R \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< p$, et $G \in \mathbb{K}(X)$ n'admettant pas α pour pôle tel que :

$$F = G + \frac{R}{(X - \alpha)^p}$$

- **Propriété** : soient α un scalaire, p un entier naturel non nul, et $R \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$. Alors :

$$\exists! (a_i)_{i \in [1, p]}, \quad \frac{R}{(X - \alpha)^p} = \sum_{i=1}^p \frac{a_i}{(X - \alpha)^i}$$

càd :

$$\exists! (a_i)_{i \in [1, p]}, \quad \frac{R}{(X - \alpha)^p} = \frac{a_1}{X - \alpha} + \frac{a_2}{(X - \alpha)^2} + \cdots + \frac{a_p}{(X - \alpha)^p}$$

- **Propriété** : soient $F = P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, et α un pôle simple de F . Dans ce contexte, on peut écrire : $F = G + \frac{\lambda}{X - \alpha}$, où G est une fraction rationnelle n'admettant pas α pour pôle, et $\lambda = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$