Problème de la semaine 10 - Corrigé

Exercice 1 — (Applications directes du cours).

1) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \longmapsto (1-x^2)\,\mathrm{e}^{2x}$.

2) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $g : x \longmapsto \ln(\cos(x))$.

3) On considère la fonction $h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(2x) - 2\sin(x)$.

   a) Montrer que : $h(x) \underset{0}{\sim} \alpha x^n$, où α est un réel et n un entier à déterminer.

   b) Déduire de la question précédente les limites suivantes, en justifiant brièvement les résultats :

$$\ell_2 = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^2}\ ; \quad \ell_3 = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3}\ ; \quad \ell_4 = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^4}$$

Corrigé.

1) En premier lieu : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)\,\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4x^3}{3} - x^2 - 2x^3 + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

Par suite : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ (1-x^2)\,\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + x^2 - \dfrac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)}$

2) En premier lieu : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$

Par suite : $\forall\, x \in \ ]-\pi/2;\pi/2[\ ,\ \ln(\cos(x)) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)$

On utilise alors le DL usuel : $\ln(1-X) = -X - \dfrac{X^2}{2} + o\left(X^2\right)$ en posant : $X = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$ (on a bien $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} X = 0$). On obtient alors :

$$\forall\, x \in \ ]-\pi/2;\pi/2[\ ,\ \ln(\cos(x)) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2\right)$$

$$\Longrightarrow \forall\, x \in \ ]-\pi/2;\pi/2[\ ,\ \ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

D'où : $\boxed{\forall\, x \in \ ]-\pi/2;\pi/2[\ ,\ \ln(\cos(x)) = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)}$

3) a) D'une part : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2x - \dfrac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right)$ et d'autre part : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 2\sin(x) = 2x - \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

Par suite : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = -x^3 + o(x^3)$ d'où : $\boxed{h(x) \underset{0}{\sim} -x^3 \text{ (ainsi } \alpha = -1 \text{ et } n = 3).}$

b) D'après a) : $\dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^2} \underset{0}{\sim} -x$ d'où $\boxed{\ell_2 = \lim\limits_{x \xrightarrow{x>0} 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^2} = 0}$

Toujours d'après a) : $\dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} \underset{0}{\sim} -1$ d'où $\boxed{\ell_3 = \lim\limits_{x \xrightarrow{x>0} 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} = -1}$

Une dernière fois d'après a) : $\dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^3} \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x}$ d'où $\boxed{\ell_4 = \lim\limits_{x \xrightarrow{x>0} 0} \dfrac{\sin(2x) - 2\sin(x)}{x^4} = -\infty}$

Exercice 2 — **(Asymptote).** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

1) Tiens, au fait, pourquoi f peut-elle être définie sur $\mathbb{R}$ tout entier par la formule ci-dessus ?

2) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet une asymptote (notée D) dont on donnera une équation. Préciser la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de D au voisinage de $+\infty$.

Corrigé.

1) Pour tout réel x, on a : $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.

D'où : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2x + 2 > 0$. $\boxed{\text{Ainsi } f \text{ peut être définie sur } \mathbb{R}}$.

2) Soit x un réel strictement positif. On a : $f(x) = x\sqrt{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}}$. On utilise alors le développement limité usuel : $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + o\left(X^2\right)$ en posant $X = \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ (on a effectivement $\lim\limits_{x \to +\infty} X = 0$).

On obtient de la sorte :

$$f(x) = x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$\text{D'où : } f(x) = x\left[1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \qquad \text{soit : } \qquad f(x) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

<u>Conclusion</u> : la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x + 1$, et $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de celle-ci au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 — **(DL, équivalents).**

1) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\cos(x)$, et celui de $\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2 en 0.

2) Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1-x^2}$.

3) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = n^4\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

Corrigé.

1) On a : $\boxed{\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)}$ et $\boxed{\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)}$.

2) On déduit de la question précédente que : $\boxed{\sqrt{1-x^2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)}$.

3) On déduit des questions précédentes que : $\cos\dfrac{1}{n} - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}} = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{24n^4} - 1 + \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{8n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

D'où : $\cos\dfrac{1}{n} - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{6n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$. Par conséquent : $\cos\dfrac{1}{n} - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^4}$.

Il s'ensuit que : $n^4\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6}$ d'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^4\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}\right) = \dfrac{1}{6}}$

Exercice 4 — (Pour vous changer les idées entre deux exercices).

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(E): \qquad \mathrm{e}^{2x} + 2021\,\mathrm{e}^{x} - 2022 = 0$$

Corrigé.

Via le changement de variable $X = \mathrm{e}^x$, l'équation se réécrit $X^2 + 2021X - 2022 = 0$. Cette équation possède exactement deux racines réelles : 1 et -2022.

On en déduit que le scalaire x est solution de (E) SSI : $\mathrm{e}^x = 1$ ou $\mathrm{e}^x = -2022$.

Conclusion.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \left[\mathrm{e}^{2x} + 2021\,\mathrm{e}^{x} - 2022 = 0\right] \iff [x = 0]$
- $\forall x \in \mathbb{C},\ \left[\mathrm{e}^{2x} + 2021\,\mathrm{e}^{x} - 2022 = 0\right] \iff \left[x = 0\ [2\mathrm{i}\pi] \quad \text{ou} \quad x = \ln(2022) + \mathrm{i}\pi\ [2\mathrm{i}\pi]\right]$

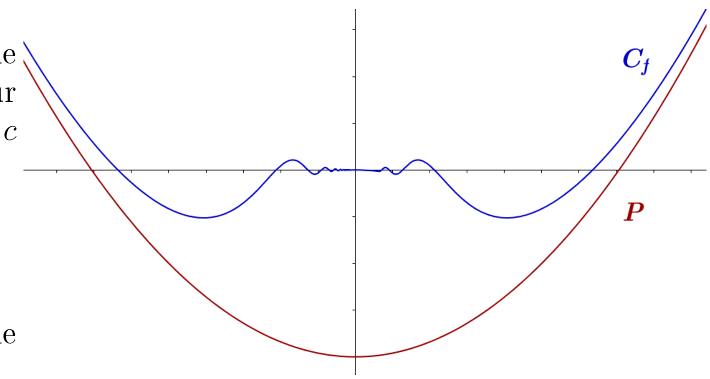
Exercice 5 — (Parabole asymptote).

D'ordinaire, une asymptote en $+\infty$ à une courbe $\mathscr{C}$ désigne pour vous une *droite* D, telle que "$\mathscr{C}$ est arbitrairement proche de D au voisinage de $+\infty$".

Pour rappeler la définition précise, on dit que $\mathscr{C}_f$ (représentant une fonction f définie au voisinage de $+\infty$) admet pour asymptote la droite D d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} [f(x) - (ax+b) = 0]$$

Cette définition peut être généralisée.
Explicitement, nous dirons que $\mathscr{C}_f$ (représentant une fonction f définie au voisinage de $+\infty$) admet pour **asymptote la parabole** P **d'équation** $y = ax^2+bx+c$ **au voisinage de** $+\infty$ si



$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(ax^2+bx+c\right) = 0\right]$$

L'objet de cet exercice est d'étudier un exemple de telle situation.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ en posant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad f\,(x) = x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f (c'est la courbe de l'illustration ci-dessus).

1) Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne peut admettre de droite asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) Déterminer cinq réels a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \cos\left(\frac{2}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

3) Déduire de la question précédente que $\mathscr{C}_f$ admet une parabole P asymptote au voisinage de $+\infty$. On précisera une équation de P, ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_f$ et P au voisinage de $+\infty$.

Corrigé.

1) Pour tout réel $x > 0$ on a : $\dfrac{f(x)}{x} = x\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$. D'où : $\boxed{\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty}$.[1]

Si f admettait une droite (d'équation $y = ax + b$) asymptote au voisinage de $+\infty$, alors on aurait : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$. Puisque $f(x)/x$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ d'après ce qui précède, on en déduit que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ ne peut admettre de droite asymptote au voisinage de } +\infty}$.

1. Puisque $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 1$.

2) Pour tout réel X on a : $\cos(X) = 1 - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^4}{24} + o\left(X^4\right)$. En posant $X = 2/x$ dans ce développement limité, on obtient :

$$\boxed{\forall\, x \neq 0,\ \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ (ainsi : } a_0 = 1\,;\ a_2 = -2\,;\ a_4 = \frac{2}{3}\,; \text{ et } a_1 = a_3 = 0)}$$

3) D'après la question précédente : $\forall\, x \neq 0,\ f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{2}{x}\right) = x^2 - 2 + \dfrac{2}{3x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Conclusion : la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une parabole asymptote d'équation $y = x^2 - 2$, et $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de celle-ci au voisinage de $+\infty$.

Exercice 6 — (Dérivées successives).

On considère, pour tout n de $\mathbb{N}$ les fonctions :

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!} \qquad \text{et} \qquad L_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^x f_n^{(n)}(x)$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

1) Calculer, pour tout x de $\mathbb{R}$, $L_0(x), L_1(x)$ et $L_2(x)$.

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

3) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$, L_n est une fonction polynômiale, dont on pourra préciser le degré.

4) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

5) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

7) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (n+1) L_{n+1}(x) = x L'_n(x) + (n+1-x) L_n(x).$$

8) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x L''_n(x) - (x-1) L'_n(x) + n L_n(x) = 0.$$

Corrigé.

1) • $\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = \mathrm{e}^x \dfrac{x^0 \mathrm{e}^{-x}}{0!}$ soit : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = 1}$.

• $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_1^{(1)}(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$. D'où : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = 1 - x}$.

- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f_2\,(x) = \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}\,(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$.

  D'où : $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ L_2\,(x) = x^2 - 4x + 2}$.

2) On applique la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième de f_n. Ce faisant on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}\,(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\left(\mathrm{e}^{-k}\right)^{(k)}\left(x^n\right)^{(n-k)} \qquad (\diamondsuit)$$

Or pour tout entier naturel $N \leqslant n$ on a : $\left(x^n\right)^{(N)} = \dfrac{n!x^{n-N}}{(n-N)!}$ [2] et $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{(N)} = (-1)^N\,\mathrm{e}^{-x}$. On applique ces deux formules en donnant respectivement à N les valeurs $n-k$ et k, et on injecte les résultats obtenus dans la relation $(\diamondsuit)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}\,(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^k\,\mathrm{e}^{-x}\frac{n!x^k}{(k)!} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{(-1)^k}{(k)!}x^k\mathrm{e}^{-x}$$

Il s'ensuit immédiatemment que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n\,(x) = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{(-1)^k}{(k)!}x^k}$

3) On déduit de la question 2 que L_n est une fonction polynômiale de degré n (et de coefficient dominant [3] $\dfrac{(-1)^n}{(n)!}$).

4) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+1}\,(x) = \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}$

   D'après les théorèmes généraux f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}\,(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(n+1)\,x^n\mathrm{e}^{-x} - x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}\,(x) = \frac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!} - \frac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'_{n+1}\,(x) = f_n\,(x) - f_{n+1}\,(x)}$$

5) D'après les théorèmes généraux L_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}\,(x) = \mathrm{e}^x f_{n+1}^{(n+1)}\,(x) + \mathrm{e}^x f_{n+1}^{(n+2)}\,(x)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}\,(x) = \mathrm{e}^x\left(f'_{n+1}\right)^{(n)}(x) + \mathrm{e}^x\left(f'_{n+1}\right)^{(n+1)}(x)$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}\,(x) = \mathrm{e}^x\left[f_n^{(n)}\,(x) - f_{n+1}^{(n)}\,(x)\right] + \mathrm{e}^x\left[f_n^{(n+1)}\,(x) - f_{n+1}^{(n+1)}\,(x)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad L'_{n+1}\,(x) = \mathrm{e}^x\left[f_n^{(n)}\,(x) + f_n^{(n+1)}\,(x)\right] - \mathrm{e}^x\left[f_{n+1}^{(n)}\,(x) + f_{n+1}^{(n+1)}\,(x)\right]$$

On observe alors que : $\mathrm{e}^x\left[f_n^{(n)}\,(x) + f_n^{(n+1)}\,(x)\right] = L'_n\,(x)$ et $f_{n+1}^{(n+1)} = f_n^{(n)} - f_{n+1}^{(n)}$. Ainsi :

2. Ce résultat n'avait pas à être justifié.
3. Pour un polynôme, le *coefficient dominant* est le coefficient du terme de plus haut degré.

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - e^x\left[f_{n+1}^{(n)}(x) + f_n^{(n)}(x) - f_{n+1}^{(n)}(x)\right]$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - e^x f_n^{(n)}(x)$$

$$\iff \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)}$$

6) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!} = \dfrac{x}{n+1} \times \dfrac{x^n e^{-x}}{n!} \iff \boxed{f_{n+1}(x) = \dfrac{x}{n+1}\, f_n(x)}$

7) D'après l'énoncé : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L_{n+1}(x) = e^x \times \left[\dfrac{x}{n+1}\, f_n(x)\right]^{(n+1)}$

On applique alors la formule de Leibniz [4] pour calculer la dérivée $(n+1)$-ième ci-dessus. Ce faisant on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L_{n+1}(x) = e^x \times \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{(k)} f_n^{(n+1-k)}(x)\right]$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L_{n+1}(x) = e^x \times \left[\frac{x}{n+1} f_n^{(n+1)}(x) + \frac{n+1}{n+1} f_n^{(n)}(x)\right]$$

$$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L_{n+1}(x) = \frac{xe^x}{n+1} f_n^{(n+1)}(x) + e^x f_n^{(n)}(x)$$

D'où : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad (n+1)\,L_{n+1}(x) = xe^x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\,L_n(x) \qquad (\spadesuit)$

Par ailleurs : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad L'_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x) + e^x f_n^{(n+1)}(x)$

$\iff \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad e^x f_n^{(n+1)}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \qquad (\clubsuit)$

On déduit alors de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad (n+1)\,L_{n+1}(x) = xL'_n(x) - xL_n(x) + (n-1)\,L_n(x)$$

$$\iff \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad (n+1)\,L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n-1-x)\,L_n(x)}$$

8) En dérivant terme à terme l'égalité obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad (n+1)\,L'_{n+1}(x) = xL''_n(x) + L'_n(x) + (n-1-x)\,L'_n(x) - L_n(x)$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (n+1)\,L'_n(x) - (n+1)\,L_n(x) = xL''_n(x) + L'_n(x) + (n-1-x)\,L'_n(x) - L_n(x)$$

$$\iff \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad xL''_n(x) + (1-x)\,L'_n(x) + nL_n(x) = 0}$$

4. Application légitime puisque les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x}{n+1}$ et $x \longmapsto f_n(x)$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.