

PROBLÈME DE LA SEMAINE 11

EXERCICE 1 — (POLYNÔMES, ET DL EN ZÉRO DE LA FONCTION TANGENTE).

1/ Rappels sur la fonction tangente.

- a/ Quelle est la période de la fonction tangente ? Justifier brièvement que la fonction tangente admet en 0 un développement limité à tout ordre.
- b/ Soit n un entier naturel. Que vaut $\tan^{(2n)}(0)$?
- c/ Rappeler les deux formules donnant la dérivée de la fonction tangente.
- d/ Retrouver le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.
- e/ A l'aide de la question précédente, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$$

2/ Démontrer qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\triangleright T_0(X) = X$$

$\triangleright$ et pour tout entier naturel n , la dérivée n -ième $\tan^{(n)}$ de la fonction $\tan$, vérifie :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x))$$

On explicitera une relation de récurrence entre les polynômes T'_n et T_{n+1} .

3/ Expliciter les polynômes T_1 , T_2 et T_3 .

4/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme T_n sont entiers naturels.

5/ Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n , pour tout entier naturel n .

6/ (*Hors-programme à ce stade de l'année*). Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \quad \tan(x) = \sum_{j=0}^n \frac{t_j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t)) \, dt$$

On citera précisément le théorème utilisé.

EXERCICE 2 — (TRANSFORMÉE DE LAPLACE).

Problématique. L'objet de cet exercice est de fournir des éléments d'explication sur la transformée de Laplace, et en particulier de donner l'origine de quelques formules sur les transformées de Laplace usuelles.

- 1/ On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et à valeurs réelles. Dans E , on note F la partie constituée des fonctions négligeables devant la fonction exponentielle au voisinage de $+\infty$, soit :

$$F = \{f \in E / f(t) = o_{+\infty}(e^t)\}$$

- a/ Justifier que les fonctions $\sin$, et $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) appartiennent à F .
b/ Etablir que F est un sous-espace vectoriel de E , et qu'il est de dimension infinie.
c/ Justifier que les fonctions polynomiales appartiennent à F .
- 2/ Pour toute fonction $f \in F$, on appelle **transformée de Laplace** de f la fonction notée $\mathcal{L}f$ définie par :

$$\forall p \in]1, +\infty[, \quad [\mathcal{L}f](p) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_0^A f(t) e^{-pt} dt \right)$$

On **admet** dans cet exercice que pour toute fonction f de F , la limite notée ci-dessus existe et est finie. Dans les trois questions ci-dessous, on suppose que p est un réel strictement supérieur à 1.

- a/ *Fonction de Heaviside.* On considère la fonction $H = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Montrer que : $[\mathcal{L}H](p) = \frac{1}{p}$.
b/ *Fonction exponentielle.* Soient α un réel positif, et f la fonction définie par : $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = e^{-\alpha t}$.

Etablir que : $\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha + p} (1 - e^{-(\alpha+p)A})$. En déduire l'expression de $[\mathcal{L}f](p)$.

- c/ *Fonctions cosinus et sinus.* On considère la fonction g définie par : $\forall t \in \mathbb{R}_+, g(t) = \cos(\alpha t)$.

Etablir que : $\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A \cos(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha^2 + p^2} [p + e^{-pA} (\alpha \sin(\alpha A) - p \cos(\alpha A))]$

En déduire que : $[\mathcal{L}g](p) = \frac{p}{\alpha^2 + p^2}$

De la même manière, on peut prouver que $\mathcal{L}h(p) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + p^2}$, avec : $\forall t \in \mathbb{R}_+, h(t) = \sin(\alpha t)$.

- 3/ On considère la fraction rationnelle : $F = \frac{4X^2 + 8X + 1}{X^3 + 3X^2 + 4X + 12}$.

- a/ On pose : $Q = X^3 + 3X^2 + 4X + 12$.

Vérifier que $z_0 = 2i$ est racine de Q . En déduire la décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

- b/ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle F .

- c/ En admettant la linéarité de la transformation de Laplace, déterminer une fonction causale f de $F(p) = \frac{4p^2 + 8p + 1}{p^3 + 3p^2 + 4p + 12}$, c'est à dire une fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que : $\mathcal{L}f = F$.