

CORRIGÉ DU DS DE MATHÉMATIQUES N°10 — 10 AVRIL 2023

Durée : 4 heures — Tout matériel électronique interdit

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés

**L'exercice 1 et le problème 1 sont communs ; puis vous traiterez
au choix l'un des deux exercices "BLANC" ou "ORANGE"**

EXERCICE 1 — (FRACTIONS RATIONNELLES)

On pose :

$$F = \frac{2X^2 + X + 1}{(X^2 + 1)(X^2 + X)} ; \quad P = 2X^2 + X + 1 \text{ et } Q = (X^2 + 1)(X^2 + X)$$

1/ Déterminer les décompositions en irréductibles du polynôme Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

La décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est : $Q = (X - i)(X + i)X(X + 1)$.

La décomposition en irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$ est : $Q = (X^2 + 1)X(X + 1)$.

2/ Effectuer la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$.

On a $\deg(F) = -2 < 0$. La partie entière de F est donc nulle.

D'après le théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, il existe un unique quadruplet (a, b, c, d) de complexes tel que :

$$F = \frac{2X^2 + X + 1}{(X - i)(X + i)X(X + 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i} \quad (\spadesuit)$$

➤ En multipliant les 2 termes de $(\spadesuit)$ par X , on obtient :

$$XF = \frac{2X^2 + X + 1}{(X - i)(X + i)(X + 1)} = a + \frac{bX}{X + 1} + \frac{cX}{X - i} + \frac{dX}{X + i}$$

Par évaluation en 0, on en déduit : $a = 1$

➤ En multipliant les 2 termes de $(\spadesuit)$ par $X + 1$, on obtient :

$$(X + 1)F = \frac{2X^2 + X + 1}{(X - i)(X + i)X} = \frac{a(X + 1)}{X} + b + \frac{c(X + 1)}{X - i} + \frac{d(X + 1)}{X + i}$$

Par évaluation en -1 , on en déduit : $b = -1$

► En multipliant les 2 termes de (♠) par $X - i$, on obtient :

$$(X - i)F = \frac{2X^2 + X + 1}{(X + i)X(X + 1)} = \frac{a(X - i)}{X} + \frac{b(X - i)}{X + 1} + c + \frac{d(X - i)}{X + i}$$

Par évaluation en i , on en déduit : $c = \frac{-1 + i}{-2(1 + i)} = \frac{1 - i}{2(1 + i)} = \frac{-2i}{4} = \frac{-i}{2}$

► En multipliant les 2 termes de (♠) par $X + i$, on obtient :

$$(X + i)F = \frac{2X^2 + X + 1}{(X - i)X(X + 1)} = \frac{a(X + i)}{X} + \frac{b(X + i)}{X + 1} + \frac{c(X + i)}{X - i} + d$$

Par évaluation en $(-i)$, on en déduit : $d = \frac{-1 - i}{-2(1 - i)} = \bar{c} = \frac{i}{2}$

CONCLUSION. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ est :

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X + 1} - \frac{1}{2} \frac{i}{X - i} + \frac{1}{2} \frac{i}{X + i}$$

3/ En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

D'après la question précédente :

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X + 1} + \frac{i}{2} \frac{X - i - (X + i)}{X^2 + 1} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X + 1} + \frac{1}{X^2 + 1}$$

CONCLUSION. La décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ est :

$$F = \frac{1}{X} - \frac{1}{X + 1} + \frac{1}{X^2 + 1}$$

4/ Dans cette question, A désigne un réel ≥ 1 . On pose :

$$I(A) = \int_1^A \frac{2t^2 + t + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + t)} dt$$

a/ Calculer $I(A)$ en fonction de A .

D'après la question précédente, on a :

$$I(A) = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit :

$$I(A) = \int_1^A \frac{1}{t} dt - \int_1^A \frac{1}{t + 1} dt + \int_1^A \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Par suite :

$$I(A) = [\ln(t)]_1^A - [\ln(1 + t)]_1^A + [\arctan(t)]_1^A$$

D'où :

$$I(A) = \ln(A) - \ln(1+A) + \ln(2) + \arctan(A) - \frac{\pi}{4}$$

CONCLUSION. $\forall A \geq 1, \quad I(A) = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2+1} dt = \ln\left(\frac{A}{1+A}\right) + \ln(2) + \arctan(A) - \frac{\pi}{4}$

b/ Etablir que $I(A)$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$, et calculer cette limite.

On a : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{1+A} = 1$ d'où : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{A}{1+A}\right) = 0$

Par ailleurs : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \arctan(A) = \frac{\pi}{2}$.

CONCLUSION. $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A) = \ln(2) + \frac{\pi}{4}$

En 2ème année, vous noterez ce résultat : $\int_1^{+\infty} \frac{2t^2 + t + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + t)} dt = \ln(2) + \frac{\pi}{4}$

PROBLÈME 1 — (ANALYSE)

Partie I

1/ Rappeler l'expression donnant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $f_1 : x \mapsto (1+x)^\alpha$ (avec α réel non nul arbitraire).

D'après le cours : $\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$

2/ Dédurre de la question précédente le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

D'après la question précédente : $\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$

3/ Dédurre de la question précédente le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $\arcsin$.

D'après la question précédente, et par parité : $\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^5)$

On en déduit que : $\forall x \in]-1, 1[, \quad \arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$

Partie II — Résolution d'une ED

4/ On veut résoudre dans cette question l'équation différentielle

$$(E1) : \quad \cos(t) y''(t) - 2 \sin(t) y'(t) - \cos(t) y(t) = 0$$

sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Plus précisément, on cherche à déterminer les fonctions $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I solutions de (E1), en utilisant une méthode appelée “changement de fonction inconnue”.

a/ Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I . On pose pour tout réel $t \in I : z(t) = y(t) \cos(t)$.

Montrer que y est solution de (E1) si et seulement si $z'' = 0$.

La fonction z de l'énoncé est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I puisque y est supposée $\mathcal{C}^2$ et d'après les théorèmes généraux. On peut donc la dériver deux fois sur l'intervalle I , et on ne va pas se gêner pour le faire. Deux calculs sans difficulté donnent : $\forall t \in I, z''(t) = \cos(t)y''(t) - 2\sin(t)y'(t) - \cos(t)y(t)$.

On peut donc conclure que : y est solution de (E1) si et seulement si $z'' = 0$.

b/ Dédurre de la question précédente la solution générale de (E1) sur I .

D'après la question précédente : y est solution de (E1) si et seulement si $z'' = 0$. Or $z'' = 0$ SSI il existe deux scalaires a et b tels que : $\forall t \in I, z(t) = at + b$.

En recollant les morceaux, on en déduit que y est solution de (E1) si et seulement si il existe deux

scalaires a et b tels que : $\forall t \in I, y(t) = \frac{at + b}{\cos(t)}$.

5/ On veut résoudre dans cette question l'équation différentielle

$$(E2) : (1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$$

sur l'intervalle $J =]-1, 1[$.

Plus précisément, on cherche à déterminer les fonctions $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur J solutions de (E2), en effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$.

a/ Pour tout réel $t \in I$, on pose : $z(t) = y(\sin(t))$. Il revient au même d'écrire que : $\forall x \in J, y(x) = z(\arcsin(x))$.

Montrer que y est solution de (E2) si et seulement si z est solution de (E1).

La fonction z de l'énoncé est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I puisque y est supposée $\mathcal{C}^2$ et d'après les théorèmes généraux. On peut donc la dériver deux fois sur l'intervalle I . On a :

$$\forall t \in I, z'(t) = \cos(t)y'(\sin(t)) \text{ puis : } z''(t) = -\sin(t)y'(\sin(t)) + \cos^2(t)y''(\sin(t)).$$

La fonction z est donc solution de (E1) si et seulement si pour tout $t \in I$ on a :

$$-\sin(t)\cos(t)y'(\sin(t)) + \cos^3(t)y''(\sin(t)) - 2\sin(t)\cos(t)y'(\sin(t)) - \cos(t)y(\sin(t)) = 0$$

La fonction $\cos$ ne s'annulant pas sur I , on peut simplifier par $\cos(t)$ et ainsi obtenir :

$$\cos^2(t)y''(\sin(t)) - 3\sin(t)y'(\sin(t)) - y(\sin(t)) = 0$$

Via le changement de variable $x = \sin(t)$, l'assertion précédente est équivalente à la suivante :

$$\forall x \in J, (1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0 \text{ qui est satisfaite SSI } y \text{ est solution de } (E2).$$

Conclusion. y est solution de (E2) si et seulement si z est solution de (E1).

b/ Dédurre de la question précédente la solution générale de (E2) sur J .

D'après la question précédente et la question 5-b), on peut conclure que la solution générale de (E2) est l'ensemble des fonctions y pour lesquelles il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall t \in J =]-1, 1[, y(t) = \frac{a \arcsin(t) + b}{\sqrt{1-t^2}}$$

Partie III — Une alternative pour résoudre (E2)

On considère la même équation différentielle (E2) : $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$ que dans la partie II.

Dans cette partie, on ne cherche pas à résoudre cette équation, mais à déterminer le développement limité en 0 d'une solution de (E2).

Tout au long de cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ solution de (E2).

6/ Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $J =]-1, 1[$.

D'après ce qui précède et les théorèmes généraux, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $J =]-1, 1[$.

7/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

La fonction f étant solution de l'équation (E2), on a pour tout réel x dans J : $(1-x^2)f''(x) - 3xf'(x) - f(x) = 0$. Puisqu'en outre la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J , on peut dériver n fois cette relation, et obtenir grâce à la formule de Leibniz :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$$

8/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Etablir une relation entre a_{n+2} et a_n .

D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = (n+1)^2 a_n$.

9/ Soit p un entier naturel quelconque. Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction de a_1 et a_0 respectivement et à l'aide de factorielles.

On peut conjecturer (même principe que dans les intégrales de Wallis) les expressions des termes pairs et impairs de la suite (a_n) , puis démontrer ces formules par récurrence.

$$\text{On obtient : } \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = \frac{[(2n)!]^2}{2^{2n} (n!)^2} a_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 2^{2n} (n!)^2 a_1$$

Partie IV — Conclusion

On pourra utiliser dans cette partie les résultats des parties II et III.

Soit n un entier naturel.

10/ Ecrire le DL à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $g : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Indication : on pourra observer que g est la solution de (E2) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

Il "suffit" de voir que la fonction $g : x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est la solution de (E2) telle que $g(0) = a_0 = 0$ et $g'(0) = a_1 = 1$. Par suite, d'après la question précédente et la formule de Taylor-Young :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

11/ Ecrire le DL à l'ordre $2n$ en 0 de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Comme dans la question précédente, il suffit de voir que la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la solution de (E2) telle que $h(0) = a_0 = 1$ et $h'(0) = a_1 = 0$. Par suite, d'après la question 10 et la formule de Taylor-Young :

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} x^{2k} + o(x^{2n})$$

12/ Ecrire le DL à l'ordre $2n+1$ en 0 de la fonction $\arcsin$.

On déduit par intégration de la formule précédente que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \arcsin(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!}{(2k+1) 2^{2k} (k!)^2} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

13/ **Application.** Etablir que : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{16^n}{(n+1) \binom{2n+1}{n}}$

Indication : on pourra s'intéresser au coefficient de x^{2n+1} dans le DL à l'ordre $2n+1$ en 0 de g .

...

PROBLÈME BLANC — POLYNÔMES

On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$T_0 = 1, T_1 = X, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Ces polynômes sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce*.

1/ Expliciter T_2 et T_3 .

D'après l'énoncé : $T_2 = 2XT_1 - T_0 \iff T_2 = 2X^2 - 1$.

Puis : $T_3 = 2XT_2 - T_1 \iff T_3 = 4X^3 - 3X$.

2/ Etablir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(T_n) = n \text{ et } \text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$$

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(T_n) = n$ et $\text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$ par récurrence double sur n . Notons :

$$\mathcal{P}(n) : \text{“deg}(T_n) = n \text{ et } \text{cd}(T_n) = 2^{n-1}\text{”}$$

► Initialisation (pour $n = 1$ et $n = 2$) : on a $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$. On observe que $\text{deg}(T_1) = 1$ et $\text{deg}(T_2) = 2$; et $\text{cd}(T_1) = 2^0$ et $\text{cd}(T_2) = 2^1$. Donc les propriétés $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

► Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$ pour un certain entier naturel non nul n . On exploite alors la relation $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

Dans le terme de droite de cette égalité, le degré de $2XT_{n+1}$ est par hypothèse de récurrence, égal à $1 + (n + 1) = n + 2$; tandis que celui de T_n est égal à n (toujours par hypothèse de récurrence).

Puisque $\text{deg}(2XT_{n+1}) > \text{deg}(T_n)$, on en déduit d'une part que $\text{deg}(2XT_{n+1} - T_n) = \text{deg}(2XT_{n+1}) = n + 2$, et d'autre part que : $\text{cd}(2XT_{n+1} - T_n) = \text{cd}(2XT_{n+1}) = 2\text{cd}(T_{n+1})$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\text{cd}(T_{n+1}) = 2^n$, donc : $\text{cd}(2XT_{n+1}) = 2^{n+1}$.

En résumé, on a établi que : $\text{deg}(T_{n+2}) = n + 2$ et $\text{cd}(T_{n+2}) = 2^{n+1}$, ce qui signifie que la propriété $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie, et prouve l'hérédité.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{deg}(T_n) = n \text{ et } \text{cd}(T_n) = 2^{n-1}$

3/ Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Dans la suite, on pourra admettre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\text{ch}(\theta)) = \text{ch}(n\theta)$.

Pour faire preuve d'originalité, prouvons la propriété $P(n) : \text{“}\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)\text{”}$ par récurrence sur n .

► Initialisation (pour $n = 0$ et $n = 1$) : d'une part $T_0 = 1$ d'où pour tout réel θ on a : $T_0(\cos(\theta)) = 1$. D'autre part, pour tout réel θ on a : $\cos(0 \times \theta) = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part $T_1 = X$ d'où pour tout réel θ on a : $T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$. D'autre part, pour tout réel θ on a : $\cos(1 \times \theta) = \cos(\theta)$. Donc $P(1)$ est vraie.

► Hérédité : supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$ pour un certain entier naturel non nul n . Alors, pour tout réel θ on a :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) \underbrace{T_{n+1}(\cos(\theta))}_{=_{HR} \cos((n+1)\theta)} - \underbrace{T_n(\cos(\theta))}_{=_{HR} \cos(n\theta)} = 2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) \text{ d'où : } T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta) \end{aligned}$$

Ce qui assure que la propriété $P(n + 2)$ est vraie, et prouve l'hérédité de la propriété.

CONCLUSION. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

4/ Soit n un entier naturel. A l'aide de la question précédente, établir que :

$$T_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad T'_n(1) = n^2$$

Soit n un entier naturel. D'après la question précédente : $T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0)$

d'où : Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = 1$.

Considérons à présent la fonction $F : \theta \in \mathbb{R} \mapsto T_n(\cos(\theta))$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions qui le sont, et : $\forall \theta \in \mathbb{R}, F'(\theta) = -\sin(\theta) T'_n(\cos(\theta))$.

Comme par ailleurs on a : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, on peut affirmer que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, F'(\theta) = -n \sin(n\theta)$.

En identifiant les deux expressions obtenues pour F' , on a : $\sin(\theta) T'_n(\cos(\theta)) = n \sin(n\theta)$.

Alors, pour tout réel θ (non multiple de π) on a : $T'_n(\cos(\theta)) = \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

Il reste à observer que $T'_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1} T'_n(x)$ (puisque T_n est polynomiale donc $\mathcal{C}^\infty$ donc en particulier $\mathcal{C}^1$) pour obtenir : $T'_n(1) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$. Comme $\sin(\theta) \underset{0}{\sim} \theta$ et $\sin(n\theta) \underset{0}{\sim} n\theta$, on en déduit que $\frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \underset{0}{\sim} n^2$, ce qui entraîne $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = n^2$ et donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T'_n(1) = n^2}$

5/ Soit à présent n un entier naturel non nul. Déterminer les racines de T_n .

On justifiera en particulier que toutes les racines de T_n sont dans l'intervalle $[-1, 1]$, et qu'elles sont toutes simples.

Soit n un entier naturel non nul. On cherche les racines de T_n appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Soit donc x un réel de cet intervalle tel que : $T_n(x) = 0$. Puisque x est compris entre -1 et 1 , il existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. On a alors :

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\iff T_n(\cos(\theta)) = 0 \iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\pi}{n} \right] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + k \frac{\pi}{n} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

Posons alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$. Il est clair que les réels θ_k sont n réels distincts de $[0, \pi]$. Puisque la restriction de la fonction $\cos$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est injective, les réels $(\cos(\theta_k))_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ sont n réels distincts de l'intervalle $[-1, 1]$; qui plus est, ce sont (par construction) n racines distinctes du polynôme T_n . Comme T_n est de degré n (cf question 2), on peut conclure qu'il n'y en a pas d'autres.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, le polynôme T_n possède n racines distinctes (donc simples puisque T_n est de degré n) qui sont les réels : $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

6/ Etudier la parité* du polynôme T_n en fonction de la parité de l'entier naturel n .

Au regard des premiers termes de la suite, on peut facilement conjecturer que T_{2n} est pair tandis que T_{2n+1} est impair. On prouve par récurrence sur n la propriété $P(n)$: " T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair".

► Initialisation (pour $n = 0$) : triviale puisque $T_0 = 1$ et $T_1 = X$.

► Hérédité : soit n un entier naturel tel que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire : T_{2n} est pair et T_{2n+1} est impair.

Alors : $T_{2n+2} = 2XT_{2n+1} - T_{2n}$ est la différence entre $2XT_{2n+1}$ qui est pair (en tant que produit de polynômes impairs) et T_{2n} également pair. Par suite T_{2n+2} est pair.

Puis : $T_{2n+3} = 2XT_{2n+2} - T_{2n+1}$ est la différence entre $2XT_{2n+2}$ qui est impair (en tant que produit de polynômes de parités différentes) et T_{2n+1} également impair. Par suite T_{2n+3} est impair.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : pour tout entier naturel n , le polynôme T_n a la même parité que n .

*. Par parité du polynôme, on entend parité de la fonction polynomiale associée.

7/ Soit n un entier naturel non nul, et x un nombre réel. Montrer que : $|x| \leq 1 \iff |T_n(x)| \leq 1$.

► Supposons $|x| \leq 1$: alors existe un unique réel θ dans $[0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. Donc $T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. En particulier $|T_n(x)| \leq 1$ puisque $|\cos(n\theta)| \leq 1$.

On a ainsi établi que : $|x| \leq 1 \implies |T_n(x)| \leq 1$ (♠)

► Si $|x| > 1$: alors il existe un réel $\theta > 0$ tel que $x = \operatorname{ch}(\theta)$. Donc $T_n(x) = T_n(\operatorname{ch}(\theta)) = \operatorname{ch}(n\theta)$. En particulier $|T_n(x)| > 1$ puisque $|\operatorname{ch}(n\theta)| > 1$ dès lorsque n et θ sont non nuls.

On a ainsi établi que : $|x| > 1 \implies |T_n(x)| > 1$ (♣)

Conclusion : d'après (♠) et (♣), pour tout entier naturel n non nul : $|x| \leq 1 \iff |T_n(x)| \leq 1$.

8/ Etablir que l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède exactement $(n+1)$ solutions dans $\mathbb{R}$,

que l'on notera $a_0, \dots, a_n$ (avec $a_0 > a_1 > \dots > a_n$).

Soit n un entier naturel non nul, et soit x un nombre réel. Supposons que $|T_n(x)| = 1$. Alors en particulier : $|T_n(x)| \leq 1$ (wouaouh), donc $|x| \leq 1$. Pour la troisième fois depuis le début de ce problème, on en déduit l'existence et l'unicité d'un réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

Par suite : $|T_n(x)| = 1 \iff |\cos(n\theta)| = 1 \iff n\theta \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n}$.

Les solutions de l'équation $|T_n(x)| = 1$ sont donc tous les réels $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à voir que cet ensemble ne contient qu'un nombre fini de valeurs, obtenues en faisant parcourir à k l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$. En effet, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le réel $\cos\left(\frac{(k+n)\pi}{n}\right)$ est égal à $\cos\left(\frac{(n-k)\pi}{n}\right)^\dagger$.

Conclusion : en résumé, l'équation $|T_n(x)| = 1$ possède $(n+1)$ solutions dans $[-1, 1]$, les $(n+1)$ réels $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

9/ Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $T_n(a_k)$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a : $T_n(a_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, T_n(a_k) = (-1)^k$.

PROBLÈME ORANGE — POLYNÔMES

Notations.

► Dans ce problème, on note $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues sur $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

► On note $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels en l'indéterminée X , et pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

[†]. Puisque : $\cos(X + \pi) = \cos(\pi - X) = -\cos(X)$.

► On pourra identifier polynôme et fonction polynomiale associée.

PARTIE A - Etude d'une famille de polynômes

1/ Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = (X^2 - 1)^n$, et $P_n = \frac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}$.

a/ Calculer P_0 , P_1 et P_2 .

$P_0 = 1$ et $P_1 = X$. Puis :

$$P_2 = \frac{2}{24} [(X^2 - 1)^2]^{(2)} = \frac{1}{12} [X^4 - 2X^2 + 1]^{(2)} = \frac{1}{12} [12X^2 - 4] \text{ d'où : } P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$$

b/ Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel quelconque. Par définition : $U_n = (X^2 - 1)^n$. En particulier : $\deg(U_n) = 2n$. Par suite la dérivée n -ème de U_n est un polynôme de degré n . En d'autres termes : $\deg(U_n^{(n)}) = n$. Puisque le degré d'un polynôme est invariant par multiplication par un scalaire non nul, on en déduit que : $\deg\left(\frac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}\right) = n$. Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.

Par ailleurs, U_n est un polynôme unitaire, et de degré $2n$. Il s'ensuit que le coefficient dominant de $U_n^{(n)}$ est $\frac{(2n)!}{n!}$.[‡] Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \text{cd}(P_n) = 1$.

2/ Dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque.

a/ En utilisant la formule de Leibniz, montrer que :

$$P_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$$

Soit n un entier naturel, avec $n \geq 2$. On a : $U_n = (X^2 - 1)^n = (X-1)^n (X+1)^n$.

D'après la formule de Leibniz, on a donc :

$$\begin{aligned} U_n^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)} \\ \iff U_n^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} (X+1)^k \end{aligned}$$

[‡]. On peut prouver par récurrence que pour tout polynôme P de degré n et pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le coefficient dominant de $P^{(k)}$ est $n! \text{cd}(P) / (n-k)!$. Initialisation (pour $k=0$) : immédiate. Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Alors $P^{(k+1)}$ est de degré $n-k-1$, et on a : $\text{cd}(P^{(k+1)}) = \text{cd}((P^{(k)})') = (n-k-1) \times n! \text{cd}(P) / (n-k)!$ en utilisant l'hypothèse de récurrence et la propriété du cours suivant laquelle $\text{cd}(P') = \deg(P) \text{cd}(P)$. On en déduit que : $\text{cd}(P^{(k+1)}) = n! \text{cd}(P) / (n-(k+1))!$, ce qui prouve l'hérédité et achève cette récurrence.

$$\iff U_n^{(n)} = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{k!(n-k)!} (X-1)^{n-k} (X+1)^k$$

$$\text{D'où : } P_n = \frac{n!n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$$

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k.$$

b/ En déduire les valeurs de $P_n(1)$ et de $P_n(-1)$.

Il s'ensuit que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a :

$$P_n(1) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 0^{n-k} 2^k = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \text{ et } P_n(-1) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-2)^n 0^k = \frac{(-1)^n 2^n}{\binom{2n}{n}}$$

$$\text{Conclusion. } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P_n(1) = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \quad \text{et} \quad P_n(-1) = \frac{(-1)^n 2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

3/ Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a/ Déterminer les racines de U_n ainsi que leur multiplicité.

On a : $U_n = (X-1)^n (X+1)^n$. Les racines de U_n sont donc 1 et -1 , toutes deux de multiplicité n .

b/ En utilisant le théorème de Rolle, montrer que P_n possède au moins n racines dans l'intervalle $] -1, 1[$.

► **Preuve informelle.** D'après ce qui précède, la fonction $x \in [-1, 1] \mapsto U_n(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$, et s'annule en 1 et en -1 . Elle vérifie donc les hypothèses du théorème de Rolle, donc il existe un réel $c \in] -1, 1[$ tel que $U'_n(c) = 0$.

La fonction $x \in [-1, 1] \mapsto U'_n(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$, s'annule en $c \in] -1, 1[$. En outre, elle s'annule en 1 et en -1 , puisque 1 et -1 sont racines de multiplicité n de U_n . La fonction U'_n vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur les intervalles $[-1, c]$ et $[c, 1]$, et il existe donc deux réels $d \in] -1, c[$ et $e \in] c, 1[$ tels que $U''_n(d) = 0$ et $U''_n(e) = 0$.

Et c'est reparti!... Finalement, le raisonnement précédent permet d'affirmer que la fonction $U_n^{(n)}$ possède n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Comme P_n est égal à $U_n^{(n)}$ à une constante multiplicative non nulle près, on en déduit que P_n possède au moins n racines réelles deux à deux distinctes dans $] -1, 1[$.

► **Preuve formelle.** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrons par récurrence sur k que pour tout entier $k \in [1, n]$, l'assertion $A(k)$: " $U_n^{(k)}$ possède au moins k racines dans $] -1, 1[$ " est vraie.

Initialisation ($k = 1$). La fonction $x \in [-1, 1] \mapsto U_n(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] - 1, 1[$, et s'annule en 1 et en -1 . Elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, donc il existe un réel $c \in] - 1, 1[$ tel que $U'_n(c) = 0$. L'assertion $A(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $A(k)$ soit vraie pour un entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La fonction $x \in [-1, 1] \mapsto U_n^{(k)}(x)$ est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] - 1, 1[$, et par hypothèse de récurrence, possède k racines dans $] - 1, 1[$. Notons $\alpha_1 < \dots < \alpha_k$ ces racines.

En outre, puisque 1 et -1 sont racines de multiplicité n de U_n , on a : $U_n^{(i)}(\pm 1) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En particulier : $U_n^{(k)}(\pm 1) = 0$.

En notant $\alpha_0 = -1$ et $\alpha_{k+1} = 1$, on a donc : $\forall k \in \llbracket 0, k+1 \rrbracket, U_n^{(k)}(\alpha_i) = 0$.

Sur chacun des intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ (avec i variant de 0 à k), la fonction $U_n^{(k)}$ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. En appliquant $(k+1)$ fois ce théorème, on peut donc affirmer que :

$$\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \exists \beta_i \in] \alpha_i, \alpha_{i+1} [, U_n^{(k+1)}(\beta_i) = 0$$

Puisque les intervalles $] \alpha_i, \alpha_{i+1} [$ sont deux à deux disjoints (et contenus dans $] - 1, 1[$), les réels β_i sont deux à deux distincts (et dans $] - 1, 1[$).

On peut ainsi affirmer que le polynôme $U_n^{(k+1)}$ possède au moins $(k+1)$ racines $(\beta_0, \dots, \beta_k)$ dans $] - 1, 1[$. Ce qui signifie que l'assertion $A(k+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Par conséquent : pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_n^{(k)}$ possède au moins k racines dans $] - 1, 1[$.

En particulier : $U_n^{(n)}$ possède au moins n racines dans $] - 1, 1[$. Comme P_n est égal à $U_n^{(n)}$ à une constante multiplicative non nulle près, on peut conclure.

Conclusion. P_n possède au moins n racines 2 à 2 distinctes dans $] - 1, 1[$.

- c/ Le polynôme P_n peut-il avoir d'autres racines que celles évoquées dans la question précédente ? Quelle est la multiplicité des racines de P_n ?

Puisque le polynôme P_n est de degré n , il possède au plus n racines (comptées avec multiplicité). Or, d'après la question précédente, P_n possède déjà n racines réelles deux à deux distinctes dans $[-1, 1]$.

Conclusion. Le polynôme P_n possède exactement n racines dans $[-1, 1]$, toutes simples.

4/ Dans cette question, n désigne un entier naturel quelconque.

- a/ Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Etablir par récurrence sur n que :

$$\int_{-1}^1 P^{(n+1)}(t)Q(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k [P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+1)}(t) dt$$

Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Notons $A(n)$ l'assertion de l'énoncé.

Pour $n = 0$, on a :
$$\int_{-1}^1 P^{(1)}(t)Q(t) dt = [P(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P(t)Q'(t) dt$$

D'autre part : $\sum_{k=0}^0 (-1)^k [P^{(0-k)}(t)Q^{(k)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^1 \int_{-1}^1 P(t)Q^{(1)}(t) dt = [P(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P(t)Q'(t) dt$

Il s'ensuit que $A(0)$ est vraie.

Supposons que $A(n)$ est vraie pour un entier naturel n . Alors, par intégration par parties § :

$$\int_{-1}^1 P^{(n+2)}(t)Q(t) dt = [P^{(n+1)}(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P^{(n+1)}(t)Q'(t) dt \quad (\spadesuit)$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P^{(n+1)}(t)Q'(t) dt &= \sum_{k=0}^n (-1)^k [P^{(n-k)}(t)Q^{(k+1)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+2)}(t) dt \\ \iff \int_{-1}^1 P^{(n+1)}(t)Q'(t) dt &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} [P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+2)}(t) dt \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P^{(n+2)}(t)Q(t) dt &= [P^{(n+1)}(t)Q(t)]_{-1}^1 + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k [P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k+1)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+2} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+2)}(t) dt \\ \iff \int_{-1}^1 P^{(n+2)}(t)Q(t) dt &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k [P^{(n+1-k)}(t)Q^{(k+1)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+2} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Ce qui prouve que l'assertion $A(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de l'assertion.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,$

$$\int_{-1}^1 P^{(n+1)}(t)Q(t) dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k [P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+1)}(t) dt$$

b/ En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ on a :

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t) dt = 0$$

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t) dt = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 U_{n+1}^{(n+1)}(t)Q(t) dt$$

D'où, d'après la question précédente :

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t) dt = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k [U_{n+1}^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)]_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 U_{n+1}(t)Q^{(n+1)}(t) dt \right) \quad (\spadesuit)$$

§. Toutes les intégrations par parties de cette question font intervenir des fonctions polynomiales, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; ce qui rend légitimes ces IPP.

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on a : $\left[U_{n+1}^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) \right]_{-1}^1 = U_{n+1}^{(n-k)}(1) Q^{(k)}(1) - U_{n+1}^{(n-k)}(-1) Q^{(k)}(-1)$

Puisque 1 et -1 sont racines de multiplicité $n+1$ de U_{n+1} , on a : $U_{n+1}^{(n-k)}(1) = U_{n+1}^{(n-k)}(-1) = 0$.

On en déduit que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left[U_{n+1}^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) \right]_{-1}^1 = 0 \quad (\clubsuit)$

Par ailleurs, puisque Q est de degré inférieur ou égal à n , on a $Q^{(n+1)} = 0$.

On en déduit que : $\int_{-1}^1 U_{n+1}(t) Q^{(n+1)}(t) dt = 0 \quad (\heartsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$: $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_{-1}^1 P_{n+1}(t) Q(t) dt = 0$.

PARTIE B - Polynômes interpolateurs de Lagrange, version générale

Soit n un entier naturel non nul, et $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ ($n+1$) réels deux à deux distincts du segment $[-1, 1]$.

On pose pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $L_k = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{X - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}$.

5/ Soit k un entier naturel arbitraire. Quel est le degré de L_k ?

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. A une constante multiplicative non nulle près[¶], le polynôme L_k est le produit de n polynômes de degré 1.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg(L_k) = n$.

6/ Etablir que pour tout $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, avec $i \neq k$. Alors : $L_k(\alpha_i) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{\alpha_i - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j} = 0$ puisque l'indice j de ce produit prendra la valeur i .

En revanche : $L_k(\alpha_k) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{\alpha_k - \alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j} = \prod_{j=0, j \neq k}^n 1 = 1$.

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$

7/ Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré au plus n . Etablir que : $P = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k$

Notons $Q = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k$. Le polynôme Q est dans $\mathbb{R}_n[X]$ en tant que combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ ($\mathbb{R}_n[X]$ étant un sev de $\mathbb{R}[X]$).

¶. En l'occurrence : $\prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1}{\alpha_k - \alpha_j}$.

Par ailleurs : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, Q(\alpha_i) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k(\alpha_i) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) \delta_{ik} = P(\alpha_i)$.

Puisque P et Q sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, et qu'ils prennent les mêmes valeurs en $(n+1)$ scalaires distincts, le principe du prolongement algébrique permet d'affirmer que $P = Q$.

Conclusion. $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k$.

8/ Etablir que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est bijective.

D'après la question précédente, les applications

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} & \text{et} & & \psi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) & & & (x_0, \dots, x_n) &\longmapsto \sum_{k=0}^n x_k L_k \end{aligned}$$

sont réciproques l'une de l'autre.

En effet, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $\psi(\varphi(P)) = \psi(P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n)) = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k = P$ (la dernière égalité provenant directement de la question précédente).

D'où : $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Dans l'autre sens, on a, pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$\varphi(\psi(x_0, \dots, x_n)) = \varphi\left(\sum_{k=0}^n x_k L_k\right) = \left(\sum_{k=0}^n x_k L_k(\alpha_0), \dots, \sum_{k=0}^n x_k L_k(\alpha_n)\right) = (x_0, \dots, x_n)$ (la dernière égalité provenant directement de la construction des polynômes de Lagrange L_k , cf question 6).

D'où : $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

Conclusion. L'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est bijective.
 $P \longmapsto (P(\alpha_0), \dots, P(\alpha_n))$

PARTIE C - Application au calcul intégral

Dans cette partie, on note $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ les racines du polynôme P_{n+1} , qui sont donc $(n+1)$ réels deux à deux distincts du segment $[-1, 1]$.

9/ Soit $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. Justifier qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_f(\alpha_i) = f(\alpha_i)$$

D'après la question 8, $\varphi^{-1}(f(\alpha_0), \dots, f(\alpha_n))$ est l'unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_f(\alpha_i) = f(\alpha_i)$$

10/ Montrer qu'il existe $n+1$ scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, que l'on précisera, tels que : $P_f = \sum_{j=0}^n \lambda_j L_j$.

D'après la question 8 de nouveau :
$$P_f = \sum_{k=0}^n f(\alpha_k) L_k.$$

► Dorénavant, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$, on notera :

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad J(f) = \int_{-1}^1 P_f(t) dt$$

11/ Montrer que $J(f)$ peut s'écrire : $J(f) = \sum_{i=0}^n \mu_i f(\alpha_i)$, où les réels μ_i seront exprimés à l'aide des polynômes L_i et des réels α_i .

D'après la question précédente, et par définition de J_f on a :

$$J_f = \int_{-1}^1 P_f(t) dt = \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n f(\alpha_i) L_i(t) dt = \sum_{i=0}^n f(\alpha_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt$$

Conclusion. $J_f = \sum_{i=0}^n \mu_i f(\alpha_i)$ avec : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mu_i = \int_{-1}^1 L_i(t) dt$

12/ Montrer que si f est polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $I_f = J_f$.

Si f est polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $P_f = P$ d'après la question 7.

Conclusion. Si f est polynomiale de degré inférieur ou égal à n , alors $I_f = J_f$

13/ On suppose dans cette question que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n+1$. En réalisant la division euclidienne de f par P_{n+1} , établir que $J(f) = I(f)$.

On suppose dans cette question que f est polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n+1$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que : $f = P_{n+1}Q + R$ avec $\deg(R) \leq n$ (♠).

En outre on peut observer que $\deg(Q) \leq n$ (♣), puisque $\deg(f) \leq 2n+1$ et $\deg(P_{n+1}) = n+1$.

Notons encore que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(\alpha_i) = P_{n+1}(\alpha_i) Q(\alpha_i) + R(\alpha_i)$.

Les scalaires α_i étant les racines du polynôme P_{n+1} , on en déduit que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, f(\alpha_i) = R(\alpha_i)$.
Par conséquent : $P_f = R$ ($\heartsuit$).

On a alors :

$$I_f = \int_{-1}^1 f(t) dt \underbrace{=}_{(\spadesuit)} \int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t) + R(t) dt \underbrace{=}_{(\heartsuit)} \int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t) dt + \underbrace{\int_{-1}^1 P_f(t) dt}_{=J_f}$$

Or, le polynôme Q étant de degré $\leq n$ (cf ($\clubsuit$)), on a : $\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t) dt = 0$ d'après la question 4-b.

On en déduit que : $I_f = J_f$.

Conclusion. Si f est polynomiale de degré inférieur ou égal à $2n + 1$, alors $I_f = J_f$.