Colle 25 – Questions de cours

Question de cours 1. — **Propriété** : Si A et B sont deux évènements d'un univers Ω, alors : $\mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$ <u>et</u> $\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)$

Preuve. *On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble fini.*
Soit A un évènement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Alors pour tout évènement B, on a : $\Omega = B \cup \bar{B}$. D'où : $A \cap \Omega = A \cap \left(B \cup \bar{B}\right)$.
Or $A \cap \Omega = A$ (puisque $A \subset \Omega$) ; et $A \cap \left(B \cup \bar{B}\right) = (A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$).
On en déduit que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)\right)$.

Or l'union $(A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)$ est disjointe*, donc (par définition de probabilité) :

$$\mathbb{P}\left((A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right)\right) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right)$$

En résumé, on a établi que : $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A \cap \bar{B}\right)$, d'où en divisant tous les termes de cette égalité par $\mathbb{P}(A)$ (qui est non nulle) : $1 = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right)$, soit finalement : $\boxed{\mathbb{P}_A\left(\bar{B}\right) = 1 - \mathbb{P}_A(B)}$.

➤ Pour le second point, on considère B_1 et B_2 deux évènements arbitraires dans Ω. On a alors :

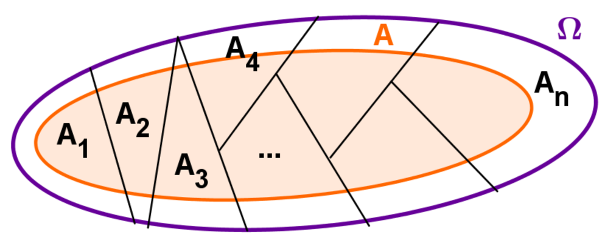
$$\mathbb{P}_A(B_1 \cup B_2) = \frac{\mathbb{P}((B_1 \cup B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}((B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A))}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap A) + \mathbb{P}(B_2 \cap A) - \mathbb{P}((B_1 \cap B_2) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

$$\boxed{= \mathbb{P}_A(B_1) + \mathbb{P}_A(B_2) - \mathbb{P}_A(B_1 \cap B_2)}$$

Question de cours 2. — **Théorème (formule des probabilités totales, revisitée)** : soit A un évènement, et soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$$

Illustration. Sur la figure ci-contre, on a fait apparaître le fait que la probabilité de l'évènement A est la somme des probabilités des "petits morceaux" qui composent A, càd la somme des probabilités des évènements $A \cap A_1, \dots, A \cap A_n$.



Preuve. Soient donc A un évènement et $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ un système complet d'évènements.

Le point-clef consiste ici à observer que les évènements $(A \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints, et recouvrent A. En clair, il s'agit d'établir les deux faits suivants :

1) $\forall\, (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow (A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = \emptyset$ et 2) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i) = A$

➤ <u>Pour le point 1</u> : il suffit d'observer que pour tout couple (i,j) d'entiers (compris entre 1 et n), on a† : $(A \cap A_i) \cap (A \cap A_j) = A \cap (A_i \cap A_j)$. Or si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$ puisque les A_i constituent un SCE par hypothèse. On en déduit le point 1).

➤ <u>Pour le point 2</u> : comme $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ est un système complet d'évènements, on peut déjà affirmer que : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. On en déduit que : $A \cap \Omega = A \cap \left(\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$. En utilisant encore une fois la distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$, on obtient : $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap A_i)$, ce qui établit le point 2.

*. C'est-à-dire : $(A \cap B) \cap \left(A \cap \bar{B}\right) = \emptyset$. La preuve de ce fait est triviale, puisque si un élément appartient aux deux termes de l'intersection, alors il est à la fois dans B, et dans son complémentaire $\bar{B}$.

†. En utilisant l'associativité de l'intersection d'une part, et la propriété décoiffante selon laquelle $A \cap A = A$.

➤ <u>Conclusion</u> : d'après ce qui précède $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)\right)$. Et puisque d'après le 1), les évènements $(A \cap A_i)$ sont deux à deux disjoints, la probabilité de leur réunion est la somme de leurs probabilités individuelles, soit :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A \cap A_i) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A \cap A_i)}$$

Il reste à voir que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A \cap A_i) = \mathbb{P}_{A_i}(A) \times \mathbb{P}(A_i)$ (par définition de probabilité conditionnelle) pour conclure : $\boxed{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A \cap A_i)}$.

Question de cours 3. — **Propriétés de l'espérance et de la variance** Soit X une VAR sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors :

$$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ E(aX + b) = aE(X) + b \qquad \text{et} \qquad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Preuve.Notons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et pour tout entier i compris entre 1 et n notons : $x_i = X(\omega_i)$ et $p_i = P(X = x_i)$. Soient a et b deux réels arbitraires.

La variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs : $ax_1 + b,\ldots,\ ax_n + b$ avec les probabilités $p_1,\ldots,\ p_n$. Il s'ensuit que :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b)\,p_i = \sum_{i=1}^{n}(ax_ip_i + bp_i) = a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i + b\underbrace{\sum_{i=1}^{n}p_i}_{=1} = aE(X) + b$$

Notons $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et pour tout entier i compris entre 1 et n notons : $x_i = X(\omega_i)$ et $p_i = P(X = x_i)$. Soient a et b deux réels arbitraires.

La variable aléatoire $aX + b$ prend les valeurs : $ax_1 + b,\ldots,\ ax_n + b$ avec les probabilités $p_1,\ldots,\ p_n$. Il s'ensuit que :

$$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - E(aX + b))^2\,p_i = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - aE(X) - b))^2\,p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}a^2\,(x_i - E(X)))^2\,p_i = a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X)))^2\,p_i = a^2V(X)$$

Question de cours 4. — **Propriétés des probabilités.** Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire, et soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.

1/ $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

2/ Pour tout évènement $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3/ Pour tout couple (A, B) d'évènements de $\mathscr{P}(\Omega)$, $\quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Preuve.Le point 1 est une conséquence de la définition. En effet, on a d'une part $\mathbb{P}(\Omega) = 1$; et d'autre part les évènements Ω et $\emptyset$ sont disjoints. On en déduit que :

$$\mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) \quad \text{d'où : } \mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) \quad \text{soit } \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Prouvons le point 2 : soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Les évènements A et $\overline{A}$ étant disjoints, on a : $\mathbb{P}\left(A \cup \overline{A}\right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$. Par ailleurs, puisque $A \cup \overline{A} = \Omega$, on a : $\mathbb{P}\left(A \cup \overline{A}\right) = 1$. On déduit de ces deux relations que : $\mathbb{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Prouvons le point 3 : soient A et B deux évènements dans Ω. On observe judicieusement que l'évènement $A \cup B$ est la réunion disjointe [‡] de $A \backslash B$ et de B.

Il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B) \qquad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, l'évènement A est aussi la réunion disjointe de $A \backslash B$ et de $A \cap B$. D'où :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(A \cup B) \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et de $(\clubsuit)$ que : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Question de cours 5. — **Théorème (formule de Koenig-Huygens)** : avec les mêmes notations que ci-dessus, $V(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$.

Preuve.*Puisque l'univers Ω est supposé fini dans ce chapitre, on pourra noter x_i les valeurs prises par la VAR X, et p_i les probabilités correspondantes.*

Avec les notations usuelles :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i}_{=E(X^2)} - 2E(X) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}_{=E(X)} + E(X)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} \text{ d'où : } V(X) = E\left(X^2\right) - 2E(X)^2 + E(X)^2$$

soit $\boxed{V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2}$

---

‡. Dire qu'une partie P est la *réunion disjointe* de deux parties P_1 et P_2 signifie que $P = P_1 \cup P_2$, et que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

Question de cours 6. — **Propriété *(espérance de la loi binomiale)*** : si X suit la loi binomiale $B(n,p)$, alors $E(X)=np$.

Preuve.On a : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, d'où : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Or pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $k\dbinom{n}{k}=k\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}=n\dbinom{n-1}{k-1}$

Donc : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-1-k}$

$$=np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{0}p^k(1-p)^{n-1-k}=np\underbrace{(p+(1-p))^{n-1}}_{=1}\text{ donc }\boxed{E(X)=np}$$

Question de cours 7. — **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev**.

Inégalité de Markov. Soit X une VAR positive. On a :

$$\forall a\in\mathbb{R}_+,\ a\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant E(X)$$

Preuve.Soit X une VAR positive sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$, et soit a un réel positif. On a :

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})\geqslant\sum_{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant a}X(\omega)\,\mathbb{P}(\{\omega\})\geqslant a\times\sum_{\omega\in\Omega,\ X(\omega)\geqslant a}\mathbb{P}(\{\omega\})=a\mathbb{P}(X\geqslant a)$$

Soit : $\boxed{\forall a\in\mathbb{R}_+,\ a\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant E(X)}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une VAR. On a :

$$\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Preuve.Soient X une VAR, et ε un réel >0. On a : $[|X-E(X)|\geqslant\varepsilon]\iff\left[(X-E(X))^2\geqslant\varepsilon^2\right]$.

En appliquant l'inégalité de Markov à la VAR (positive) $(X-E(X))^2$ (et en prenant $a=\varepsilon^2$), on obtient :

$$E\left((X-E(X))^2\right)\geqslant\varepsilon^2\mathbb{P}\left((X-E(X))^2\geqslant\varepsilon^2\right)$$

$$\text{D'où : }\mathbb{P}\left((X-E(X))^2\geqslant\varepsilon^2\right)=\mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{E\left((X-E(X))^2\right)}{\varepsilon^2}\qquad(\spadesuit)$$

Il reste à voir que : $E\left((X-E(X))^2\right)=V(X)$ $(\clubsuit)$

En effet :

$$E\left((X-E(X))^2\right)=E\left(X^2-2XE(X)+E(X)^2\right)=E\left(X^2\right)-2E(X)^2+\underbrace{E(E(X))}_{=E(X)}=E\left(X^2\right)-E(X)^2$$

Ce qui justifie $(\clubsuit)$ d'après la formule de Koenig-Huygens.

Conclusion. D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\forall\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$