

## EXERCICES 23 — ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE — CORRIGÉ

## FAMILLES LIBRES, BASES

**EXERCICE 1.** — (Familles libres).

Dans chacun des cas suivants, déterminer si chacune des familles suivantes est libre ou liée.

$$1/ E = \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Supposons qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^2$ .**Synonyme :** les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  sont linéairement indépendants.

$$2/ E = \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^2$ .**Synonyme :** les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  ne sont pas linéairement indépendants, ou sont linéairement dépendants.

$$3/ E = \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{On a : } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille liée de  $\mathbb{R}^2$ .**Synonyme :** les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$  ne sont pas linéairement indépendants. ...

$$4/ E = \mathbb{R}_2[X]; \quad \mathcal{F} = \{1, 3X - 4, 2X^2 - X + 1\}$$

Supposons qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$a \times 1 + b(3X - 4) + c(2X^2 - X + 1) = 0$$

Par identification des coefs de  $X^2$ , on obtient :  $c = 0$ .Par identification des coefs constants, on obtient :  $a = 0$ .Il est alors trivial que  $b = 0$ .

Ainsi :

$$[a \times 1 + b(3X - 4) + c(2X^2 - X + 1) = 0] \implies [a = b = c = 0]$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_2[X]$ .**Synonyme.** Les polynômes  $1$ ,  $3X - 4$  et  $2X^2 - X + 1$  sont linéairement indépendants.

$$5/ E = \mathbb{R}_2[X]; \quad \mathcal{F} = \{X, X + 1, X^2\}$$

Supposons qu'il existe trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que :

$$aX + b(X + 1) + cX^2 = 0$$

Par identification des coefs de  $X^2$ , on obtient :  $c = 0$ .

Par identification des coefs constants, on obtient :  $b = 0$ .

Il est alors trivial que  $a = 0$ .

Ainsi :

$$[aX + b(X + 1) + cX^2 = 0] \implies [a = b = c = 0]$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Synonyme.** Les polynômes  $X$ ,  $X + 1$  et  $X^2$  sont linéairement indépendants.

$$6/ E = M_2(\mathbb{R}); \quad \mathcal{F} = \{I_2, E_{11}, E_{22} - E_{11}\}$$

On a :

$$I_2 = (E_{22} - E_{11}) + 2E_{11}$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille liée de  $M_2(\mathbb{R})$ .

$$7/ E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad \mathcal{F} = \{\sin, \cos\}$$

Supposons qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\alpha \cos + \beta \sin = 0$$

Alors :  $\alpha = 0$  (par évaluation en 0) et  $\beta = 0$  (par évaluation en  $\pi/2$ ).

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille libre de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

$$8/ E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \quad \mathcal{F} = \{\exp, \text{ch}, \text{sh}\}$$

On a :  $\exp = \text{ch} + \text{sh}$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}$  est une famille liée de  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

### EXERCICE 2. — (Bases et dimension).

Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev  $F$ , et d'en déduire la dimension de  $F$ .

$$1/ F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x + 2y - 3z = 0 \right\}$$

Soit  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$v \in F \iff x + 2y - 3z = 0 \iff x = 3z - 2y \iff v = (3z - 2y, y, z)$$

Ainsi :

$$v \in F \iff \exists (y, z) \in \mathbb{R}^2, v = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1) \iff v \in \text{Vect}((-2, 1, 0), (3, 0, 1))$$

La famille  $\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$  est génératrice de  $F$ ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 vecteurs non colinéaires). C'est donc une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 2$ .

2/  $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = 0\}$

Soit  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ . On a :

$$P \in F \iff P(0) = 0 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = aX^2 + bX \iff P \in \text{Vect}(X, X^2)$$

La famille  $\mathcal{B} = \{X, X^2\}$  est génératrice de  $F$ ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 polynômes non colinéaires). C'est donc une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{X, X^2\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 2$ .

3/  $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X], P(2) = 0\}$

Soit  $P \in \mathbb{K}_3[X]$ . D'après la formule de Taylor dans  $\mathbb{K}_3[X]$ , on a :

$$P \in F \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, P = a(X - 2) + b(X - 2)^2 + c(X - 2)^3 \iff P \in \text{Vect}(X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3)$$

La famille  $\mathcal{B} = \{X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3\}$  est génératrice de  $F$ .

Justifions que  $\mathcal{B}$  est libre. Supposons qu'il existe 3 réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$a(X - 2) + b(X - 2)^2 + c(X - 2)^3 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$$

Alors :  $c(X - 2)^3 = -a(X - 2) - b(X - 2)^2$ .

Si  $c \neq 0$ , alors le terme de gauche est un polynôme de degré 3, et celui de droite un polynôme de degré au plus 2 : contradiction.

Donc  $c = 0$ . Donc :  $a(X - 2) + b(X - 2)^2 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$ . Donc :  $a(X - 2) = -b(X - 2)^2$ .

Si  $b \neq 0$ , alors le terme de droite est un polynôme de degré 2, et celui de gauche un polynôme de degré au plus 1 : contradiction.

Donc  $b = 0$ . Donc :  $a(X - 2) = 0_{\mathbb{K}_3[X]}$ . Donc :  $a = 0$ .

En résumé, on a établi l'implication :

$$[a(X - 2) + b(X - 2)^2 + c(X - 2)^3 = 0_{\mathbb{K}_3[X]}] \implies [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille  $\mathcal{B} = \{X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3\}$  est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de  $F$ , c'est une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{X - 2, (X - 2)^2, (X - 2)^3\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 3$ .

4/ Le sev  $F$  des matrices triangulaires supérieures de  $M_2(\mathbb{K})$

Soit  $M \in M_2(\mathbb{K})$ . On a :

$$M \in F \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{K}^3, M = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$$

Ainsi :

$$M \in F \iff M \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{22})$$

La famille  $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$  est génératrice de  $F$ .

Justifions que  $\mathcal{B}$  est libre. Supposons qu'il existe 3 réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = 0_{M_2(\mathbb{K})}$$

Alors :  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . D'où :  $a = b = c = 0$ .

En résumé, on a établi l'implication :

$$[aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = 0_{M_2(\mathbb{K})}] \implies [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille  $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$  est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de  $F$ , c'est une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 3$ .

5/ Le sev  $F$  des matrices antisymétriques de  $M_3(\mathbb{K})$

Fait en classe.

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 3$ .

6/ Le sev  $F$  des fonctions  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  solutions de l'équation différentielle :  $y'' - 6y' + 8y = 0$

Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On a :

$$f \in F \iff y'' - 6y' + 8y = 0 \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, f = af_1 + bf_2$$

avec  $f_1$  et  $f_2$  définies en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{4x}$$

Ainsi :  $f \in F \iff P \in \text{Vect}(f_1, f_2)$ .

La famille  $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$  est génératrice de  $F$ ; et elle est clairement libre (car de cardinal 2, et constituée de 2 fonctions non colinéaires). C'est donc une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 2$ .

7/  $F = \text{im} \rho$  avec  $\rho : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$

On utilise la propriété bien connue du cours pour déterminer l'image de  $\rho$ .

Puisque  $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3)$ , on a :  $\text{im}(\rho) = \text{Vect}(\rho(1), \rho(X), \rho(X^2), \rho(X^3))$ .

Or :

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \rho(X^3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On en déduit que : } \text{im} \rho = \text{Vect} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right).$$

La famille  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  est donc génératrice de  $F$ .

Montrons que  $\mathcal{B}$  est libre. Supposons qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Alors :

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

La résolution aisée de ce système donne :  $a = b = c = 0$ .

En résumé, on a établi l'implication :

$$[av_1 + bv_2 + cv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}] \implies [a = b = c = 0]$$

Ce qui signifie que la famille  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  est libre. Puisqu'elle est aussi génératrice de  $F$ , c'est une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 3$ . Puisque de plus  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$ , on en déduit que :  $F = \mathbb{R}^3$  (l'application  $\rho$  est donc surjective).

**EXERCICE 3. — (Familles libres et liées dans  $\mathbb{K}[X]$ ).** Déterminer si chacune des familles est libre ou liée.  
1/ Considérons  $\mathcal{F}_1 = (1, X - 1, X^2 - X)$ .

Supposons qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$a + b(X - 1) + c(X^2 - X) = 0$$

Par identification, on obtient successivement  $c = 0$  (comparaison des termes en  $X^2$ ),  $b = 0$  (comparaison des termes en  $X$ ) puis  $a = 0$  (immédiat).

Ainsi :

$$[a + b(X - 1) + c(X^2 - X) = 0] \implies [a = b = c = 0]$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}_1 = (1, X - 1, X^2 - X)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .

2/ Considérons  $\mathcal{F}_2 = (2X + 1, X^2 + X, 2X^2 - 1)$ .

Supposons qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$a(2X + 1) + b(X^2 + X) + c(2X^2 - 1) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} b + 2c = 0 \\ 2a + b = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2a \\ c = a \end{cases}$$

En particulier, si l'on choisit  $a = 1$ , on a :  $b = -2$  et  $c = 1$ . D'où :

$$(2X + 1) - 2(X^2 + X) + (2X^2 - 1) = 0$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}_2 = (2X + 1, X^2 + X, 2X^2 - 1)$  est une famille liée de  $\mathbb{K}[X]$ .

3/ Considérons  $\mathcal{F}_3 = (X^2, X^2 - X, X^2 - 2X)$ .

Supposons qu'il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$a(X^2) + b(X^2 - X) + c(X^2 - 2X) = 0$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ b = -2c \end{cases}$$

En particulier, si l'on choisit  $c = 1$ , on a :  $b = -2$  et  $a = 1$ . D'où :

$$X^2 - 2(X^2 - X) + (X^2 - 2X) = 0$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}_3 = (X^2, X^2 - X, X^2 - 2X)$  est une famille liée de  $\mathbb{K}[X]$ .

4/ Considérons  $\mathcal{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$  où les  $L_i$  sont les polynômes (de degré 3) d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs 1, 2, 3 et 4.

Supposons qu'il existe quatre réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  tels que :

$$\underbrace{\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4}_{=P} = 0$$

Par évaluation en 1, on obtient :  $\alpha_1 = 0$  (puisque  $P(1) = \alpha_1$ ).

Par évaluation en 2, on obtient :  $\alpha_2 = 0$  (puisque  $P(2) = \alpha_2$ ).

Par évaluation en 3, on obtient :  $\alpha_3 = 0$  (puisque  $P(3) = \alpha_3$ ).

Par évaluation en 4, on obtient :  $\alpha_4 = 0$  (puisque  $P(4) = \alpha_4$ ).

Ainsi :

$$[\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 L_4 = 0] \implies [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0]$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .

**EXERCICE 4.** — (**Bases de sous-espaces vectoriels de  $M_n(\mathbb{K})$** ). Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1/  $F_1 = \{A \in M_2(\mathbb{R}), {}^t A = A\}$ .

La famille  $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$  est libre et génératrice de  $F_1$ .

**Conclusion.** La famille  $\{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}\}$  est une base de  $F_1$ . Donc  $\dim(F_1) = 3$  ( $F_1$  est un hyperplan de  $M_2(\mathbb{R})$ ).

2/  $F_2 = \{A \in M_2(\mathbb{R}), {}^t A = -A\}$ .

La famille  $\{E_{12} - E_{21}\}$  est libre et génératrice de  $F_2$ .

**Conclusion.** La famille  $\{E_{12} - E_{21}\}$  est une base de  $F_2$ . Donc  $\dim(F_2) = 1$  ( $F_2$  est une droite vectorielle de  $M_2(\mathbb{R})$ ).

3/  $F_3 = \{A \in M_3(\mathbb{R}), {}^t A = A\}$ .

La famille  $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$  est libre et génératrice de  $F_3$ .

**Conclusion.** La famille  $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$  est une base de  $F_3$ . Donc  $\dim(F_3) = 6$  ( $F_3$  est un sev de dimension 6 dans un espace vectoriel de dimension 9).

4/  $F_4 = \{A \in M_3(\mathbb{R}), {}^t A = -A\}$ .

La famille  $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$  est libre et génératrice de  $F_4$ .

**Conclusion.** La famille  $\{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, E_{23} - E_{32}\}$  est une base de  $F_4$ . Donc  $\dim(F_4) = 3$  ( $F_4$  est un sev de dimension 3 dans un espace vectoriel de dimension 9).

5/  $F_5 = \{A \in M_n(\mathbb{R}), A \text{ diagonale}\}$ .

La famille  $\{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$  est libre et génératrice de  $F_5$ .

**Conclusion.** La famille  $\{E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}\}$  est une base de  $F_5$ . Donc  $\dim(F_5) = n$  ( $F_5$  est un sev de dimension  $n$  dans un espace vectoriel de dimension  $n^2$ ).

**EXERCICE 5.** — (**ker et im**). On considère l'application  $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x + y + t \\ x + z - t \end{pmatrix}$$

On admet que  $f$  est linéaire.

1/ Déterminer le noyau de  $f$ . En préciser une base et la dimension.

$$\text{Soit } \vec{v} = (x, y, z, t) \in \ker f. \text{ On a : } \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y + t = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + y = -t \\ x + z = t \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -t \\ x + z = t \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y = -x - t \\ z = t - x \end{cases}$$

En résumé :  $\vec{v} \in \ker f \iff \exists (x, t) \in \mathbb{R}^2, \vec{v} = (x, -x - t, t - x, t)$ . Par suite :

$$\ker f = \text{Vect} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \right)$$

La famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  est génératrice de  $\ker f$  (c'est ce que l'on vient de prouver) et libre ( $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont clairement non colinéaires); c'est donc une base de  $\ker f$ , et l'on peut conclure que :  $\dim \ker f = 2$ .

2/ Déterminer l'image de  $f$ . En préciser une base et la dimension.

En vertu de la “propriété bien connue”, on a :  $\text{im } f = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3), f(\vec{e}_4))$ , où les vecteurs  $\vec{e}_i$  constituent la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

On a donc :  $\text{im } f = \text{Vect} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_4} \right)$  et l'embaras du choix pour réduire cette

famille génératrice.

En observant (par exemple) que :  $\vec{w}_4 = \vec{w}_2 - \vec{w}_3$ , on obtient :  $\text{im } f = \text{Vect} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3} \right)$

Puis en observant que :  $\vec{w}_1 = \vec{w}_2 + \vec{w}_3$ , on peut affirmer que :  $\text{im } f = \text{Vect} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{w}_3} \right)$ .

La famille  $(\vec{w}_2, \vec{w}_3)$  est génératrice de  $\text{im } f$  (c'est ce que l'on vient de prouver) et libre ( $\vec{w}_2$  et  $\vec{w}_3$  sont clairement non colinéaires) ; c'est donc une base de  $\text{im } f$ , et l'on peut conclure que :  $\boxed{\dim \text{im } f = 2}$ .

**EXERCICE 6.** — (Bases). On considère la famille  $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$  de  $M_2(\mathbb{K})$ , où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $M_2(\mathbb{K})$ .

Montrons que la famille  $\mathcal{B}'$  est libre.

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels tels que  $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0_E$ , alors :

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a-c \\ c-b-d & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = a \\ b = a+c \\ c = b+d \\ c = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que la famille  $\mathcal{B}'$  est libre ; et puisque son cardinal (4) est égal à la dimension de  $E$ , on peut conclure :

$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } E}$ .

**EXERCICE 7.** — (**Bases et dimension**). On considère l'application  $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$  définie en posant :

$$\forall P \in \mathbb{K}_3[X], \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1/ Montrer que  $\varphi$  est linéaire.

Trivial.

2/ Déterminer  $\ker \varphi$  et  $\operatorname{im} \varphi$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}_3[X]$ . Il existe quatre réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que :  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ .

On a alors :

$$P \in \ker \varphi \iff \varphi(P) = 0 \iff P(X+1) = P(X) \iff a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\iff aX^3 + 3aX^2 + 3aX + a + bX^2 + 2bX + b + cX + c + d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\iff aX^3 + (3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a+b+c+d = aX^3 + bX^2 + cX + d$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ 3a + b = b \\ 3a + 2b + c = c \\ a + b + c + d = d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$P \in \ker \varphi \iff \exists d \in \mathbb{K}, P = d$$

**Conclusion.**  $\ker \varphi = \operatorname{Vect}(1)$ .

Par ailleurs :

$$\mathbb{K}_3[X] = \operatorname{Vect}(1, X, X^2, X^3) \text{ donc } \operatorname{im} \varphi = \operatorname{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3))$$

D'où :  $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{Vect}(0, 1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$ . **Conclusion.**  $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{Vect}(1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$ .

3/ Préciser une base pour chacun des sev  $\ker \varphi$  et  $\operatorname{im} \varphi$ , en déduire leur dimension.

D'après la question précédente :  $\ker \varphi = \operatorname{Vect}(1)$ . Donc  $\{1\}$  est une base de  $\ker \varphi$ .<sup>1</sup>

**Conclusion.**  $\{1\}$  est une base de  $\ker \varphi$ . Donc  $\dim(\ker \varphi) = 1$ .

D'après la question précédente :  $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{Vect}(1, 2X+1, 3X^2+3X+1)$ . Donc  $\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\}$  est une famille génératrice de  $\operatorname{im} \varphi$ .

Montrons qu'elle est libre.

Supposons qu'il existe 3 réels  $x, y$  et  $z$  tels que :

$$x + y(2X+1) + z(3X^2+3X+1) = 0$$

Alors par identification on obtient :  $z = y = x = 0$ .<sup>2</sup>

On en déduit que la famille  $\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\}$  est libre.

**Conclusion.** La famille  $\{1, 2X+1, 3X^2+3X+1\}$  est libre et génératrice de  $\operatorname{im} \varphi$ . C'est donc une base de  $\operatorname{im} \varphi$ . Donc  $\dim(\operatorname{im} \varphi) = 3$ .

1. Un singleton  $\{\vec{v}\}$  est une famille libre SSI  $\vec{v}$  est non nul.

2. Comparer les termes en  $X^2$ , puis en  $X$  puis constants.

**EXERCICE 8. — (Bases et dimension).** Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev  $F$ , et d'en déduire la dimension de  $F$ .

1/  $F = \{A \in M_3(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(A) = 0\}$

La famille  $\mathcal{F} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, -(E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{21} + E_{22} + E_{23} + E_{31} + E_{32})\}$  est génératrice de  $F$ , et libre.

Donc  $\mathcal{F}$  est une base de  $F$ . **Conclusion.**  $\dim F = 8$ . (on dit que  $F$  est un hyperplan de  $M_3(\mathbb{R})$ ).

2/ Le sev  $F$  des fonctions  $f$  de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  solutions de l'équation différentielle :  $y' - 6y = 0$

$F = \operatorname{Vect}(\exp^6)$ . Donc :  $F = \{\exp^6\}$  est une base de  $F$ .

**Conclusion.**  $\dim F = 1$ . (on dit que  $F$  est une droite vectorielle de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ).

3/  $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = 0 \wedge P'(1) = 0\}$

D'après la formule de Taylor dans  $\mathbb{K}_4[X]$  appliquée en 1 :  $F = \operatorname{Vect}((X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ .

La famille  $\mathcal{F} = \{(X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4\}$  est génératrice de  $F$ , et il est aisé de justifier qu'elle est libre.<sup>3</sup>

**Conclusion.**  $\dim F = 3$ .

4/  $F = \ker \varphi$  avec  $\varphi : P \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto (P(0), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$

C'est un copier-coller de la question précédente. On a :  $\ker \varphi = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(0) = 0 \wedge P'(0) = 0\}$ .

**Conclusion.** La famille  $\{X^2\}$  est une base de  $F$ . Donc  $\dim F = 1$ . (on dit que  $F$  est une droite vectorielle de  $\mathbb{K}_2[X]$ ).

3. Utiliser les degrés, et le corrigé des exos de math39 au besoin.

**EXERCICE 9.** — Dans cet exercice, on note  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Par ailleurs, on définit sur  $\mathbb{R}$  trois fonctions  $g_1, g_2$  et  $g_3$  en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x}; \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$$

Enfin on note  $F$  le sev de  $E$  engendré par les fonctions  $g_i$  définies ci-dessus, càd :

$$F = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$$

Montrer que la famille  $\mathcal{F} = \{g_1, g_2, g_3\}$  est une base de  $F$ .

Supposons qu'il existe 3 réels  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tels que :  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i g_i = 0$ .

Il est équivalent d'écrire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) + \alpha_3 g_3(x) = 0$$

soit encore plus explicitement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \alpha_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0 \quad (\spadesuit)$$

Il est clair que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0$ .<sup>4</sup>

On en déduit, avec  $(\spadesuit)$  que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha_1 e^{2x} = 0$ . Ceci implique que :  $\alpha_1 = 0$ .

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_2 e^{-x} \cos(x\sqrt{3}) + \alpha_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0$$

Par évaluation en 0, on en déduit que :  $\alpha_2 = 0$ .

Par suite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_3 e^{-x} \sin(x\sqrt{3}) = 0$$

D'où l'on déduit que  $\alpha_3 = 0$  puisque la fonction  $x \mapsto e^{-x} \sin(x\sqrt{3})$  n'est pas identiquement nulle.

En résumé, on a établi que :

$$\left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i g_i = 0 \right] \implies [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0]$$

Ce qui signifie que la famille  $\{g_1, g_2, g_3\}$  est libre.

Puisqu'il est trivial que c'est également une famille génératrice de  $\text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$ , on peut conclure.

**Conclusion.** La famille  $\{g_1, g_2, g_3\}$  est une base de  $F = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$ . Donc  $\dim F = 3$ .

**EXERCICE 10.** — <sup>(\*)</sup> **(Une famille libre arbitrairement grande dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ).** Soient  $n \geq 1$  un entier naturel, et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$   $n$  réels distincts; on suppose  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ .

On considère la famille  $F_n = (f_k : x \mapsto e^{\alpha_k x}, k \in [1, n])$ . Montrer que  $F_n$  est une famille libre de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

S'inspirer de l'exo précédent, et penser aux limites...

**EXERCICE 11.** — Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on considère la famille de polynômes

$$\mathcal{F} = \left\{ \underbrace{(X-1)(X-2)(X-3)}_{=P_0}, \underbrace{X(X-2)(X-3)}_{=P_1}, \underbrace{X(X-1)(X-3)}_{=P_2}, \underbrace{X(X-1)(X-2)}_{=P_3} \right\}$$

Montrer que  $\mathcal{F}$  est libre.

Supposons qu'il existe quatre réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  tels que :

$$\underbrace{\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4}_{=P} = 0$$

4. Bornée  $\times$  limite nulle.

Par évaluation en 0, on obtient :  $\alpha_1 = 0$  (puisque  $P(0) = -6\alpha_1$ ).

Par évaluation en 1, on obtient :  $\alpha_2 = 0$  (puisque  $P(1) = 2\alpha_2$ ).

Par évaluation en 2, on obtient :  $\alpha_3 = 0$  (puisque  $P(2) = -2\alpha_3$ ).

Par évaluation en 3, on obtient :  $\alpha_4 = 0$  (puisque  $P(3) = 6\alpha_4$ ).

Ainsi :

$$[\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = 0] \implies [\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0]$$

**Conclusion.** La famille  $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Remarque.** A des constantes multiplicatives près, la famille  $\mathcal{F} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  est celle des 4 polynômes de Lagrange de  $\mathbb{K}_3[X]$  associés aux scalaires 0, 1, 2 et 3. C'est une autre façon de dire que cet exo est le même que la question 4 de l'exo 1 de la feuille précédente.

**EXERCICE 12.** — (**Transport de bases**). Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev,  $\varphi : E \rightarrow F$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , et  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  une base de  $E$ .

On note  $\varphi(\mathcal{B}) = \{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$  l'image de  $\mathcal{B}$  par  $\varphi$ .

Montrer que  $\varphi(\mathcal{B})$  est une base de  $F$ .

On prouve ainsi l'énoncé :

**“L'image d'une base par un isomorphisme est une base”**

Cf pdf.

**EXERCICE 13.** — (**Familles échelonnées de polynômes**). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans  $\mathbb{K}[X]$ , on considère  $n$  polynômes  $P_1, \dots, P_n$  tous non nuls.

On suppose que :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$$

Montrer que la famille  $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_n)$  est libre.

On prouve ainsi l'énoncé :

**“Toute famille échelonnée de polynômes est libre”**

Cf pdf.

**EXERCICE 14.** — (**Challenge**). Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P + XP'' \end{aligned}$$

est bijective (on pourra admettre que  $f$  est linéaire).

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . On a :  $P \in \ker f \iff f(P) = 0 \iff P = -XP''$ .

On vérifie alors sans peine (essentiellement par comparaison des degrés)  $P \in \ker f \iff P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ .

Par suite :  $\ker f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$ . **Donc l'endomorphisme  $f$  est injectif.**

Par ailleurs, d'après le cours :

$$\text{im } f = \text{Vect}(\mathcal{F}) \quad \text{en ayant noté} \quad \mathcal{F} = \{f(1), f(X), \dots, f(X^n)\}$$

Or pour tout entier  $k$  compris entre 0 et  $n$ , on a clairement :

$$\deg(f(X^k)) = k$$

En d'autres termes, la famille  $\mathcal{F}$  est une famille échelonnée de polynômes. Elle est donc libre, d'après l'exo précédent.

Comme de plus :

$$\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

on en déduit que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Par suite :

$$\text{im}f = \text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}_n[X] \quad \text{Donc l'endomorphisme } f \text{ est surjectif.}$$

**Conclusion.** L'endomorphisme  $f$  est bijectif. C'est donc un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ( $f \in \text{GL}(\mathbb{R}_n[X])$ ).

**EXERCICE 15.** — (Une base classique de  $\mathbb{K}_n[X]$ ). Soient  $n$  un entier naturel non nul, et  $\alpha \in \mathbb{K}$  un scalaire quelconque.

On considère la famille

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n \right\}$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

1/ Justifier que  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}_n[X]$ . En déduire que c'est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

La famille  $\mathcal{B}$  est une famille échelonnée de polynômes non nuls : à ce titre, c'est une famille libre de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

De plus :  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}_n[X]$ , et  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ . Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

2/ Justifier que  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ . En déduire que c'est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

D'après la formule de Taylor dans  $\mathbb{K}_n[X]$  appliquée en  $\alpha$  :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2} (X - \alpha)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!} (X - \alpha)^n$$

D'où :  $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(\mathcal{B})$ . La famille  $\mathcal{B}$  est donc génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

De plus :  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ , et  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ . Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**EXERCICE 16.** — (Une autre base classique de  $\mathbb{K}_n[X]$  — Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère  $(n + 1)$  scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  deux à deux distincts.

On note  $L_0, \dots, L_n$  les  $(n + 1)$  polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ .

1/ Question de cours : rappeler l'expression du polynôme  $L_k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

A savoir retrouver!!!

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \prod_{i=0, i \neq k}^n \frac{(X - \alpha_i)}{(\alpha_k - \alpha_i)}$$

2/ Etablir que la famille  $\mathcal{B} = \{L_0, \dots, L_n\}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**Méthode 1.** Pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$ , on a :

$$P = \sum_{k=0}^n P(\alpha_k) L_k$$

D'où :  $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(\mathcal{B})$ . La famille  $\mathcal{B}$  est donc génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

De plus :  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{B}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_n[X]$ , et  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ . Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

► **Méthode 2.** Supposons qu'il existe  $(n + 1)$  scalaires  $\beta_0, \dots, \beta_n$  tels que :

$$\sum_{k=0}^n \beta_k L_k = 0_{\mathbb{K}_n[X]}$$

Alors :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^n \beta_k \underbrace{L_k(\alpha_i)}_{=\delta_{ik}} = \beta_i = 0$$

On a ainsi établi que :

$$\left[ \sum_{k=0}^n \beta_k L_k = 0_{\mathbb{K}_n[X]} \right] \implies [\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \beta_i = 0]$$

Ce qui signifie que  $\mathcal{B}$  une famille libre de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

De plus :  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ .

**Conclusion :**  $\mathcal{B}$  est une famille libre de  $\mathbb{K}_n[X]$ , et  $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ . Donc  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**EXERCICE 17. — (Supplémentaires).** Dans cette partie,  $E$  désigne le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $M_2(\mathbb{R})$  des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

On pose  $F = \text{Vect}(\mathbf{I}_2)$ , et on note  $G$  le sev des matrices de  $E$  de trace nulle.

1/ Déterminer la dimension de  $F$  et la dimension de  $G$ .

Comme on l'a vu dans le livre, il est immédiat que  $\dim F = 1$  et on montre aisément que  $\dim G = 3$ .

2/ Montrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$ .

On vérifie sans difficulté que  $F \cap G = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$ . Par suite :

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim M_2(\mathbb{R}) \\ F \cap G = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\} \end{cases}$$

On en déduit<sup>5</sup> que :

$$M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$$

**EXERCICE 18. — (Supplémentaires bis).** Dans  $E = \mathbb{K}_2[X]$  on considère les sev

$$F = \text{Vect}(X^2 + X + 1, 5X + 2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(X^2 - X).$$

On pourra noter  $P_1 = X^2 + X + 1$ ;  $P_2 = 5X + 2$ ;  $P_3 = X^2 - X$ .

1/ Etablir que :  $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}_2[X]$ . Supposons que  $P \in F \cap G$ . Alors il existe trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que :

$$P = a(X^2 + X + 1) + b(5X + 2) \quad (\text{car } P \in F) \quad \text{et} \quad P = c(X^2 - X) \quad (\text{car } P \in G)$$

Ainsi :

$$a(X^2 + X + 1) + b(5X + 2) = c(X^2 - X)$$

Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a = c \\ a + 5b = -c \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ 2a + 5b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = c \\ 2a + 5b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

5. Avec la nouvelle caractérisation des sev supplémentaires obtenue comme conséquence du T4D.

D'où  $P = 0_{\mathbb{K}_2[X]}$ . **Conclusion.**  $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\}$

2/ En déduire que :  $E = F \oplus G$ .

Puisque  $F$  est engendré par deux polynômes non colinéaires, on a :  $\dim F = 2$ .

Puisque  $G$  est engendré par un polynôme non nul, on a :  $\dim G = 1$ .

Par suite :

$$\begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E & (2+1=3 \quad \text{🤖}) \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_2[X]}\} & (\text{d'après la question précédente}) \end{cases}$$

On en déduit<sup>6</sup> que :

$$\mathbb{K}_2[X] = F \oplus G$$

3/ Justifier que  $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

D'après la question précédente, on a en particulier :  $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2) + \text{Vect}(P_3)$ .

D'où :  $\mathbb{K}_2[X] = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$ .

Il s'ensuit que la famille  $\mathcal{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

De plus, le cardinal de  $\mathcal{B}'$  est égal à la dimension de  $\mathbb{K}_2[X]$ . On peut donc conclure que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

**EXERCICE 19.** — On considère les sev de  $\mathbb{R}^4$  suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + y = 0 \text{ et } z + t = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x = y \text{ et } z = t\}.$$

1/ Déterminer une base de  $F$ , puis une base de  $G$ .

Des calculs sans aucune difficulté<sup>7</sup> permettent d'obtenir :

$$F = \text{Vect} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2} \right) \quad \text{et} \quad G = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_4} \right)$$

La famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  (*resp.*  $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ) est donc génératrice de  $F$  (*resp.* de  $G$ ).

En outre, cette famille est libre car elle est constituée de 2 vecteurs trivialement non colinéaires.

**Conclusion.** La famille  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  (*resp.*  $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ ) est une base de  $F$  (*resp.* de  $G$ ).

2/ Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces supplémentaires de  $\mathbb{R}^4$ .

Il résulte de la question précédente que  $\dim F = \dim G = 2$ .

On vérifie sans peine que :  $F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\}$ .

Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4 \\ F \cap G = \{\vec{0}_{\mathbb{R}^4}\} \end{array} \right\} \implies \mathbb{R}^4 = F \oplus G$$

**Conclusion.**  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}^4$ .

6. Encore une fois avec la nouvelle caractérisation des sev supplémentaires obtenue comme conséquence du T4D.

7. Donc extrêmement dangereux !

**EXERCICE 20.** — Dans  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , on considère la partie  $F$  constituée des polynômes  $P$  tels que  $P(1) = P(-1)$ .

1/ Montrer que  $F$  est un sev de  $E$ , en déterminer une base, et en déduire la dimension de  $F$ .

Soit  $P \in \mathbb{R}_3[X] : \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad P = aX^3 + bX^2 + cX + d.$

Alors :  $P \in F \iff P(1) = P(-1) \iff a + b + c + d = -a + b - c + d \iff c = -a.$

Par suite :

$$P \in F \iff \exists (a, b, d) \in \mathbb{R}^3, \quad P = a(X^3 - X) + bX^2 + d \iff P \in \text{Vect}(X^3 - X, X^2, 1)$$

Ainsi :

$$F = \text{Vect}(X^3 - X, X^2, 1)$$

La famille  $\{X^3 - X, X^2, 1\}$  est génératrice de  $F$  (archi-trivial), et puisque c'est une famille échelonnée de polynômes, elle est libre. C'est donc une base de  $F$ .

**Conclusion.** La famille  $\{X^3 - X, X^2, 1\}$  est une base de  $F$ . Donc :  $\dim F = 3$ .

2/ Soit  $G = \text{Vect}(X)$ . Montrer que :  $E = F \oplus G$ .

D'après la question précédente :  $\dim F = 3$ .

D'après le cours :  $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ .

En outre :  $\dim G = 1$ , puisque  $G$  est engendré par un polynôme non nul.

Par ailleurs, on vérifie sans peine que :  $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\}$ .

Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}_3[X] \\ F \cap G = \{0_{\mathbb{R}_3[X]}\} \end{array} \right\} \implies \mathbb{R}_3[X] = F \oplus G$$

**Conclusion.**  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces supplémentaires dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**EXERCICE 21.** — (**Très très classique**). Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$$

est un automorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

Un polynôme  $P$  est dans le noyau de  $f$  si et seulement si  $P = P'$ . Par comparaison des degrés, cette égalité est vérifiée si et seulement si le polynôme  $P$  est nul. On en déduit que l'endomorphisme  $f$  est **injectif**.

Par ailleurs :

$$\text{im} f = \text{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n)) \iff \text{im} f = \text{Vect}(1, X - 1, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1})$$

La famille  $\{1, X - 1, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1}\}$  est une famille échelonnée de polynômes non nuls de  $\mathbb{K}_n[X]$ ; à ce titre elle est libre. Comme en outre son cardinal  $(n + 1)$  est égal à la dimension de  $\mathbb{K}_n[X]$ , c'est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ . On en déduit que :

$$\text{im} f = \text{Vect}(1, X - 1, \dots, X^k - kX^{k-1}, \dots, X^n - nX^{n-1}) = \mathbb{K}_n[X]$$

Il s'ensuit que l'endomorphisme  $f$  est **surjectif**.

Donc l'endomorphisme  $f$  est **bijectif**.

**Conclusion.** L'endomorphisme  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

**EXERCICE 22.** — (Conséquence du “transport de bases”). Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev.

On suppose que  $\dim(E) = n$ , et que  $E$  et  $F$  sont isomorphes (càd qu’il existe un isomorphisme  $\varphi : E \rightarrow F$  de  $E$  dans  $F$ ).

Etablir que  $\dim(F) = n$

On prouve ainsi l’énoncé :

“Deux ev de dimension finie isomorphes ont la même dimension.”

Soit  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  une base de  $E$ , et  $\varphi : E \rightarrow F$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ .

On montre facilement que la famille  $\varphi(\mathcal{B}) = \{\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)\}$  est génératrice de  $F$  (en utilisant le fait que  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , et la surjectivité de  $\varphi$ ), et libre (en utilisant l’injectivité de  $\varphi$ ).<sup>8</sup>

Donc la famille  $\varphi(\mathcal{B})$  est une base de  $F$ . Par conséquent :  $\dim F = \text{card}(\varphi(\mathcal{B}))$ .

**Conclusion.**  $\dim(F) = n$ .

### COORDONNÉES DANS UNE BASE, MATRICE DE PASSAGE

**EXERCICE 23.** — (Coordonnées dans  $\mathbb{R}_3[X]$ ).

Quelles sont les coordonnées de  $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$  dans :

1/ la base canonique  $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  ?

Avec les notations du cours, il est immédiat que :  $X_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ la base  $\mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$  ?

D’après la formule de Taylor dans  $\mathbb{R}_3[X]$  appliquée en 1, on a :

$$X_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) \\ P''(1)/2 \\ P'''(1)/6 \end{pmatrix} \quad \text{càd} \quad X_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3/ la base  $\mathcal{B}_3 = (L_0, L_1, L_2, L_3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ , où les  $L_i$  désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1, 2 et 3 ?

D’après les propriétés relatives aux polynômes interpolateurs de Lagrange, on a :

$$X_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \\ P(3) \end{pmatrix} \quad \text{càd} \quad X_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 15 \\ 43 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE 24.** — (Matrice de passage). On considère la famille  $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$  avec :

$$P_1 = X^2 - 1; \quad P_2 = (X - 1)^2; \quad P_3 = (X + 1)^2$$

1/ Etablir que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que :  $aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$ .

Alors :

$$a(X^2 - 1) + b(X - 1)^2 + c(X + 1)^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

8. Au passage, c’est une magnifique question de cours !

Par évaluation en 1, on en déduit que :  $c = 0$ .

Donc :

$$a(X^2 - 1) + b(X - 1)^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

Par évaluation en  $-1$ , on en déduit que :  $b = 0$ .

Donc :

$$a(X^2 - 1) = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$$

D'où :  $a = 0$ .

On a ainsi établi que :

$$[aP_1 + bP_2 + cP_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}] \implies [a = b = c = 0]$$

La famille  $B'$  est donc libre. Puisqu'en outre son cardinal est égal à la dimension de  $\mathbb{R}_2[X]$ , on peut conclure :  $B'$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2/ Ecrire la matrice de passage  $P$  de la base  $B$  à la base  $B'$ .

La matrice de passage de la base  $B$  à la base  $B'$  est :  $P = P_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

3/ Après avoir brièvement justifié que  $P$  est inversible, calculer  $P^{-1}$ .<sup>9</sup>

Soient  $(x, y, z)$  et  $(b_1, b_2, b_3)$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} -x + y + z = b_1 \\ -2y + 2z = b_2 \\ x + y + z = b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y + z - b_1 \\ -2y + 2z = b_2 \\ 2y + 2z = b_1 + b_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y + z - b_1 \\ 4y = b_1 - b_2 + b_3 \\ 4z = b_1 + b_2 + b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b_3 - b_1)/2 \\ y = (b_1 - b_2 + b_3)/4 \\ z = (b_1 + b_2 + b_3)/4 \end{cases} \end{aligned}$$

**Conclusion.**  $P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**EXERCICE 25. — (Changement de base)** Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel  $E = M_2(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On rappelle que la **base canonique** de  $E$  est la base  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. On pourra vérifier que  $P^{-1} = \frac{1}{4}R$ , où  $R \in M_3(\mathbb{R})$  est une matrice dont les coefficients appartiennent à  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

1/ On considère la famille  $\mathcal{B}' = (M_1, M_2, M_3, M_4)$  de  $M_2(\mathbb{K})$ , où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $M_2(\mathbb{K})$ .

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre réels tels que  $aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4 = 0_E$ , alors :

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a-c \\ c-b-d & d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b = a \\ b = a+c \\ c = b+d \\ c = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que la famille  $\mathcal{B}'$  est libre ; et puisque son cardinal (4) est égal à la dimension de  $E$ , on peut conclure :  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

2/ Ecrire la matrice de passage  $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

$$\text{On a : } P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3/ Justifier brièvement que  $P$  est inversible, et calculer  $P^{-1}$ .

La matrice  $P$  est inversible car c'est une matrice de passage.

Calculons son inverse en résolvant le système linéaire bien connu. Pour  $X$  et  $B$  deux vecteurs de  $\mathbb{K}^4$  on a :

$$PX = B \iff \begin{cases} x_1 - x_2 = b_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = b_2 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = b_3 \\ -x_3 + x_4 = b_4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -b_3 - b_4 \\ x_1 = b_1 - b_3 - b_4 \\ x_3 = -b_1 - b_2 \\ x_4 = -b_1 - b_2 + b_4 \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } P \text{ est inversible et } P^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 26.** — (Coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ ).

On note  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Juste pour ôter tout doute :  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On pose :

$$\vec{u}_1 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3, \quad \vec{u}_2 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{u}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

et on désigne par  $\mathcal{B}'$  la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ .

1/ Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

Soient  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que :  $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{0}$ . Alors :

$$\begin{cases} b+c = 0 \\ a+2b-c = 0 \\ 2a+3b+c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b-c = 0 \\ b+c = 0 \\ b-3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b-c = 0 \\ b = -c \\ 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

On en déduit que la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est libre. Puisque son cardinal est égal à la dimension de  $\mathbb{R}^3$ , c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Conclusion.** La famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2/ Ecrire la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

La matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  est :  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

3/ On pose  $\vec{V} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ . Quelles sont les coordonnées de  $\vec{V}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  ?

Notons  $X_{\mathcal{B}}$  (resp.  $X_{\mathcal{B}'}$ ) le triplet des coordonnées de  $\vec{V}$  dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ).

D'après le cours :

$$X_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} X_{\mathcal{B}}$$

D'après l'énoncé et la question précédente, on a :

$$X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le cours de nouveau, on a :  $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = P^{-1}$ .

Or, pour  $X = (x_1, x_2, x_3)$  et  $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$  on a :

$$\begin{aligned} [PX = B] &\iff \begin{cases} x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_3 \\ x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = b_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_3 \\ x_2 + x_3 = b_1 \\ x_2 - 3x_3 = 2b_2 - b_3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = b_3 \\ x_2 + x_3 = b_1 \\ 4x_3 = b_1 - 2b_2 + b_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{4}b_3 \\ x_2 = \frac{3}{4}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{4}b_3 \\ x_3 = \frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{4}b_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$X_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff X_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion. } X_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -15 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$$