

# CHAPITRE 23 — “L’ESSENTIEL” SUR LA DIMENSION DES ESPACES VECTORIELS

**PRÉAMBULE.** Ce chapitre est le second volet du cours d’algèbre linéaire de cette année : on y introduit la notion cruciale de dimension d’un espace vectoriel, dont on étudie quelques propriétés.

## TABLE DES MATIÈRES

|                                                               |   |
|---------------------------------------------------------------|---|
| 1. Familles libres et bases d’un espace vectoriel             | 1 |
| 2. Espaces vectoriels de dimension finie                      | 3 |
| 2.1. Dimension                                                | 3 |
| 2.2. Théorème de la base extraite                             | 4 |
| 2.3. Théorème de la base incomplète                           | 4 |
| 3. Dimension d’une somme de sev                               | 5 |
| 4. Coordonnées d’un vecteur dans une base, matrice de passage | 6 |
| 4.1. Coordonnées                                              | 6 |
| 4.2. Changement de base et matrice de passage                 | 6 |
| 5. Classification des ev de dimension finie                   | 7 |

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dorénavant, on pourra noter  $v$  au lieu de  $\vec{v}$  un élément de  $E$ .

### 1. FAMILLES LIBRES ET BASES D’UN ESPACE VECTORIEL

**DÉFINITION 1 -** Deux vecteurs  $u$  et  $v$  d’un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  sont **colinéaires** s’il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $u = \lambda v$ , ou s’il existe un scalaire  $\lambda$  tel que  $v = \lambda u$ .

**PROPRIÉTÉ 1 -** Deux vecteurs  $u$  et  $v$  non nuls d’un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  sont colinéaires SSI il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ , avec  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  tels que  $\alpha u + \beta v = 0_E$ .

**Remarque.** A l’opposé,  $u$  et  $v$  sont non colinéaires si et seulement si la relation  $\alpha u + \beta v = 0_E$  implique  $\alpha = 0$  et  $\beta = 0$ .

**DÉFINITION 2 -** Soit  $n$  un entier naturel non nul.

$n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d’un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  sont **linéairement indépendants** si :

$$\left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \right] \implies [\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i = 0] \quad (\text{avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n)$$

**Remarque.** La définition fournit une méthode pour prouver que  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d’un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  sont linéairement indépendants. Explicitement, on suppose qu’il existe  $n$  scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_E$ , et on établit que cette égalité n’est satisfaite que lorsque tous les  $\lambda_i$  sont nuls.

**Exemples.** Deux vecteurs sont linéairement indépendants SSI ils sont non colinéaires.

Si  $n$  (avec  $n \geq 3$ ) vecteurs sont linéairement indépendants alors ils sont deux à deux non colinéaires. ATTENTION : la réciproque de cette dernière affirmation est FAUSSE. Dans  $\mathbb{R}^2$ , les trois vecteurs  $u(1, 0)$ ,  $v(0, 1)$  et  $w(1, 1)$  sont deux à deux non colinéaires ; mais  $u, v$  et  $w$  ne sont pas linéairement indépendants puisque  $w = u + v$ .

**DÉFINITION 3** - Soient  $v_1, \dots, v_n$   $n$  vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .

La famille  $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est **libre** si les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  sont linéairement indépendants ; dans le cas contraire on dit que  $\mathcal{F}$  est **liée**.

**PROPRIÉTÉ 2** - Soient  $v_1, \dots, v_n$   $n$  vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .

La famille  $\mathcal{F} = (v_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  est **liée** SSI il existe un entier  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :  $v_i \in \text{Vect}(v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n)$ .

**Exemples :**

- soit  $v$  un vecteur de  $E$ . La famille  $\mathcal{F} = (v)$  est libre SSI  $v \neq 0_E$ .
- dans  $\mathbb{R}^2$ , la famille  $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$  est libre SSI  $\det(v_1, v_2) \neq 0$ .
- dans  $\mathbb{R}^3$  : la famille  $\mathcal{F} = (u(1, 2, 3), v(4, 5, 6), w(7, 8, 9))$  est liée puisque  $w = 2v - u$ . Et la famille  $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$  est libre SSI  $v_1 \wedge v_2 \neq \vec{0}$
- dans  $\mathbb{K}_2[X]$ , la famille  $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$  est (très clairement) libre.  
La famille  $\mathcal{G} = ((X - 1)(X - 2), X(X - 2), X(X - 1))$  est (un peu moins clairement) libre, puisque les 3 polynômes qui la constituent sont (à des constantes multiplicatives près) les polynômes d'interpolation de Lagrange de degré 2 associés aux valeurs 0, 1 et 2.
- dans  $\mathbb{K}[X]$ , on considère  $n$  polynômes  $P_1, \dots, P_n$  non nuls.  
On suppose que :  $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \dots < \deg(P_n)$ . Alors la famille  $\mathcal{F} = (P_1, \dots, P_n)$  est libre (toute famille échelonnée de polynômes est libre).

- dans  $M_2(\mathbb{K})$ , la famille  $\mathcal{F} = \left( \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \right)$  est libre.

- dans  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la famille  $\mathcal{F} = (\text{ch}, \text{sh}, \exp)$  est liée puisque  $\exp = \text{ch} + \text{sh}$  ; mais la famille  $\mathcal{G} = (\text{ch}, \text{sh})$  est libre.

**DÉFINITION 4** - Une **base** d'un espace vectoriel  $E$  est une famille génératrice et libre de  $E$ .

**Exemples :**

- la famille  $\mathcal{F} = (e_1(1, 0); e_2(0, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ , appelée **base canonique de  $\mathbb{R}^2$** . Définitions analogues pour les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{K}^n$ .
- la famille  $\mathcal{F} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  est la **base canonique de  $M_2(\mathbb{K})$** .
- la famille  $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$  est une base de  $\mathbb{K}_2[X]$ , appelée **base canonique de  $\mathbb{K}_2[X]$**  ; plus généralement, la famille  $(1, X, \dots, X^n)$  est la **base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$** .  
La famille  $\mathcal{G} = ((X - 1)(X - 2), X(X - 2), X(X - 1))$  est une autre base de  $\mathbb{K}_2[X]$ .

## 2. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

## 2.1. Dimension.

**DÉFINITION 5** - On appelle  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie** un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  ayant une famille génératrice finie.

**Exemples** :  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{K}^n$ ,  $M_{np}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  sont des espaces vectoriels de dimension finie. En revanche,  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (entre autres exemples) ne sont pas des espaces vectoriels de dimension finie.

La notion de dimension repose essentiellement sur les deux lemmes suivants.

**LEMME 1** - Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

- 1/ Toute famille de vecteurs de  $E$  contenue dans une famille libre est libre.
- 2/ Toute famille de vecteurs de  $E$  contenant une famille génératrice est génératrice.

**LEMME 2** - Dans un espace vectoriel  $E$  engendré par  $n$  vecteurs, le cardinal d'une famille libre est majoré par  $n$ .

**Remarque.** Une formulation équivalente de ce lemme est : dans un espace vectoriel  $E$  engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de cardinal strictement plus grand que  $n$  est liée.

**THÉORÈME 1** - Dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Le théorème rend légitime la définition suivante :

**DÉFINITION 6** - Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (non nul) de dimension finie.

On appelle **dimension** de  $E$  le cardinal d'une quelconque de ses bases (par convention, la dimension de l'espace vectoriel nul est zéro).

**Notation.** La dimension du  $\mathbb{K}$ -ev est notée  $\dim_{\mathbb{K}} E$ , ou  $\dim E$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $\mathbb{K}$ .

**Exemples** :

►  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  ;  $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$  ;  $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$  ;  $\dim M_{n,p}(\mathbb{R}) = n \times p$  ; ...

►  $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$  ;  $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$  ;  $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

► Un exemple “plus torturé” :  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$  mais  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ . En effet, une base du  $\mathbb{C}$ -ev  $\mathbb{C}$  est  $(1)$ , mais une base du  $\mathbb{R}$ -ev  $\mathbb{C}$  est  $(1, i)$ . “Dans le même style” :  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_3[X] = 4$  mais  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_3[X] = 8$ .

## 2.2. Théorème de la base extraite.

**THÉORÈME 2 - (“De la base extraite”).** De toute famille génératrice on peut extraire une base. Plus explicitement : si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille génératrice d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul  $E$ , alors il existe un entier  $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $(v_1, \dots, v_p)$  soit une base de  $E$  (quitte à renuméroter les vecteurs).

**COROLLAIRE 1 -** Tout espace vectoriel (non nul) de dimension finie admet une base.

**COROLLAIRE 2 -** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie  $n$ .

- 1/ Toute famille génératrice de  $E$  possède au moins  $n$  éléments.
- 2/ Toute famille génératrice de  $E$  de cardinal  $n$  est une base.

## 2.3. Théorème de la base incomplète.

**THÉORÈME 3 - (De la base incomplète).** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie  $n$ . Soient encore :

- $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$  (avec  $p \leq n$ ) une famille libre de  $E$ ;
- et  $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$  une base de  $E$ .

Alors il existe  $(n - p)$  vecteurs  $w_1, \dots, w_{n-p}$  (quitte à renuméroter les vecteurs) de  $\mathcal{B}$  tels que la famille  $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p})$  est une base de  $E$ .

**Interprétation.** C'est le théorème de la base extraite “à l'envers” ; l'énoncé ci-dessus signifie que toute famille libre  $\mathcal{F}$  peut-être complétée en une base de  $E$ . Encore plus précisément, les vecteurs que l'on adjoint à  $\mathcal{F}$  pour obtenir une base peuvent être pris (avec précaution, cf exemple suivant la preuve du théorème) dans une base choisie à l'avance.

**Exemples.** Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , la famille  $\mathcal{F} = (u(1, 1, 1), v(1, 2, 3))$  est libre. On peut obtenir une base de  $\mathbb{R}^3$  en rajoutant à  $\mathcal{F}$  un vecteur de la base canonique. Dans ce cas particulier, la famille  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  est une base avec  $w = e_1$  ou  $e_2$  ou  $e_3$ .

MAIS pour la famille  $\mathcal{F}' = (u'(1, 1, 0), v'(1, 2, 0))$  (qui est libre aussi), la famille  $\mathcal{B}' = (u', v', w')$  n'est une base que pour  $w' = e_3$ .

**COROLLAIRE 3 -** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non nul de dimension finie  $n$ .

- 1) Toute famille libre de  $E$  possède au plus  $n$  éléments.
- 2) Toute famille libre de  $E$  de cardinal  $n$  est une base.

**Application (tellement classique).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $(P_1, \dots, P_n)$  une famille échelonnée de polynômes de  $\mathbb{K}[X]$  non nuls, càd une famille de polynômes non nuls tels que :  $\deg(P_1) < \deg(P_2) \dots < \deg(P_n)$ . Alors la famille  $(P_1, \dots, P_n)$  est libre.

Autrement dit : toute famille échelonnée de polynômes non nuls est libre.



3/ Dans un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  de dimension  $n \geq 2$ , l'intersection de deux hyperplans distincts est de dimension  $n - 2$ .

En effet, d'après la formule des quatre dimensions :  $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$ .

On a :  $H_1 \subset (H_1 + H_2) \subset E$ . D'où :  $n - 1 \leq \dim(H_1 + H_2) \leq n$ .

Supposons que  $\dim(H_1 + H_2) = n - 1$ . Alors :  $H_1 = H_1 + H_2$  (puisque alors  $H_1 \subset (H_1 + H_2)$  et  $\dim H_1 = \dim(H_1 + H_2)$ ). Or par hypothèse,  $H_1$  et  $H_2$  sont distincts, donc il existe  $h_2 \in H_2 \setminus H_1$ , et donc  $H_1 \neq H_1 + H_2$ .

Il s'ensuit que :  $\dim(H_1 + H_2) = n$ . Par conséquent :  $n = 2(n - 1) + \dim(H_1 \cap H_2)$ , d'où :  $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$ .

#### 4. COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS UNE BASE, MATRICE DE PASSAGE

##### 4.1. Coordonnées.

**THÉORÈME 6** - Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ , et soit  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Alors :

$$\forall V \in E, \exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, V = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

**DÉFINITION 8** - Les scalaires  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  du théorème ci-dessus sont appelés **coordonnées du vecteur  $V$  dans la base  $\mathcal{B}$** .

**Remarque** : le point crucial est de remarquer que les coordonnées d'un vecteur sont relatives à la base choisie.

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , les coordonnées du polynôme  $P = aX^2 + bX + c$  sont  $(c, b, a)$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ . Les coordonnées de  $P$  sont  $(P(0), P(1), P(2))$  dans la base  $\mathcal{B}' = (L_0, L_1, L_2)$  des polynômes de Lagrange de degré 2 associés aux valeurs 0, 1 et 2. Enfin, d'après la formule de Taylor pour les polynômes, les coordonnées de  $P$  sont  $(P(\alpha), P'(\alpha), P''(\alpha)/2)$  dans la base  $\mathcal{B}'' = (1, X - \alpha, (X - \alpha)^2)$  (pour tout réel  $\alpha$ ).

##### 4.2. Changement de base et matrice de passage.

**DÉFINITION 9** - Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$  deux bases de  $E$ .

La **matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$**  notée  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  (ou  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ ) est la matrice de  $M_n(\mathbb{K})$

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

les scalaires  $\alpha_{ij}$  étant caractérisés par :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} v_i$$

**Traduction** :  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$  est la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$  (attention à l'ordre!).

**PROPRIÉTÉ 6 - (Effet d'un changement de base sur les coordonnées).** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

Pour tout vecteur  $V$  de  $E$ , notons  $X_{\mathcal{B}}$  et  $X_{\mathcal{B}'}$  les  $n$ -uplets de ses coordonnées dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement. On a :

$$X_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} X_{\mathcal{B}'}$$

**Exemple d'application.** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ . On considère la famille  $\mathcal{B}' = (X^2 - 1, X + 1, X)$ .

1/ Montrer que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

2/ A l'aide d'une matrice de passage, déterminer les coordonnées de  $P = aX^2 + bX + c$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

L'énoncé suivant a une importance plus théorique que pratique (on vous demandera souvent de faire un changement de base dans un problème, rarement deux) :

**PROPRIÉTÉ 7 -** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  trois bases de  $E$ . On a :

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}$$

La conséquence spectaculaire de cet énoncé étant la propriété (plus pratique que théorique) ci-dessous :

**PROPRIÉTÉ 8 -** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $n \neq 0$ ), soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

Alors  $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , et  $[P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}]^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ .

Pour enfoncer le clou : toute matrice de passage est inversible

## 5. CLASSIFICATION DES EV DE DIMENSION FINIE

**PROPRIÉTÉ 9 -** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev, avec  $E$  de dimension  $n \geq 1$  ;  $\mathcal{B} = (\vec{v}_i)_{i \in [1, n]}$  une base de  $E$  ; et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Enfin on note  $\mathcal{F} = (f(\vec{v}_i))_{i \in [1, n]}$ . Alors :

1/  $[f \text{ est injective}] \iff [\mathcal{F} \text{ est libre}]$

2/  $[f \text{ est surjective}] \iff [\mathcal{F} \text{ est génératrice de } F]$

3/  $[f \text{ est un isomorphisme}] \iff [\mathcal{F} \text{ est une base de } F]$

**COROLLAIRE 4 -** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

Si  $E$  et  $F$  sont isomorphes, alors  $\dim E = \dim F$

La réciproque est vraie, dans le sens rendu plus précis par l'énoncé ci-dessous :

**THÉORÈME 7 - (Classification des ev de dimension finie).**

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

**Interprétation.** A isomorphisme près,  $\mathbb{K}^n$  est le seul  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ .

**Remarque.** Dans le théorème de classification, il est surtout important de retenir l'idée de la preuve. Si  $E$  est un ev de dimension  $n$ , il admet une base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ . Un isomorphisme  $\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$  peut alors être défini en posant :  $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ; l'isomorphisme réciproque  $\varphi^{-1}$  associe à tout vecteur  $v$  de  $E$  le  $n$ -uplet de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}$ .

**COROLLAIRE 5 -** Deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimension sont isomorphes.

**Exemple.**  $S_3(\mathbb{R})$  (le sev des matrices symétriques de  $M_3(\mathbb{R})$ ),  $M_{3,2}(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}_5[X]$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels deux à deux isomorphes, tous trois étant isomorphes à  $\mathbb{R}^6$ .