Exercices 23 — Espaces vectoriels de dimension finie

Familles libres, bases

Exercice 1. — (Familles libres).
Dans chacun des cas suivants, déterminer si chacune des familles suivantes est libre ou liée.

1/ $E = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2/ $E = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3/ $E = \mathbb{R}^2$; $\quad \mathscr{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

4/ $E = \mathbb{R}_2[X]$; $\quad \mathscr{F} = \{1, 3X-4, 2X^2-X+1\}$

5/ $E = \mathbb{R}_2[X]$; $\quad \mathscr{F} = \{X, X+1, X^2\}$

6/ $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$; $\quad \mathscr{F} = \{\mathrm{I}_2, E_{11}, E_{22} - E_{11}\}$

7/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\quad \mathscr{F} = \{\sin, \cos\}$

8/ $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; $\quad \mathscr{F} = \{\exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}\}$

Exercice 2. — (Bases et dimension).
Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F, et d'en déduire la dimension de F.

1/ $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - 3z = 0 \right\}$

2/ $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(0) = 0\}$

3/ $F = \{P \in \mathbb{K}_3[X],\ P(2) = 0\}$

4/ Le sev F des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$

5/ Le sev F des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_3(\mathbb{K})$

6/ Le sev F des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $\quad y'' - 6y' + 8y = 0$

7/ $F = \mathrm{im}\rho$ avec $\quad \rho : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto (P(-1), P(0), P(1)) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 3. — (Familles libres et liées dans $\mathbb{K}[X]$). Déterminer si chacune des familles est libre ou liée.

1/ $\mathscr{F}_1 = (1, X-1, X^2-X)$
2/ $\mathscr{F}_2 = (2X+1, X^2+X, 2X^2-1)$
3/ $\mathscr{F}_3 = (X^2, X^2-X, X^2-2X)$

4/ $\mathscr{F}_4 = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ où les L_i sont les polynômes (de degré 3) d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs 1, 2, 3 et 4.

Exercice 4. — (Bases de sous-espaces vectoriels de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$). Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1/ $F_1 = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

2/ $F_2 = \{A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

3/ $F_3 = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = A\}$.

4/ $F_4 = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ {}^tA = -A\}$.

5/ $F_5 = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ A \text{ diagonale}\}$.

Exercice 5. — (ker et im). On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x+y+t \\ x+z-t \end{pmatrix}$$

On admet que f est linéaire.

1) Déterminer le noyau de f. En préciser une base et la dimension.

2) Déterminer l'image de f. En préciser une base et la dimension.

Exercice 6. — (Bases). On considère la famille $\mathscr{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 7. — (Bases et dimension). On considère l'application $\varphi : \mathbb{K}_3[X] \longrightarrow \mathbb{K}_3[X]$ définie en posant :

$$\forall P \in \mathbb{K}_3[X],\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1/ Montrer que φ est linéaire.

2/ Déterminer $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\ \varphi$.

3/ Préciser une base pour chacun des sev $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\ \varphi$, en déduire leur dimension.

Exercice 8. — (Bases et dimension). Dans chacun des cas suivants, on demande de déterminer une base du sev F, et d'en déduire la dimension de F.

1/ $F = \{A \in M_3(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(A) = 0\}$

2/ Le sev F des fonctions f de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de l'équation différentielle : $\quad y' - 6y = 0$

3/ $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \,|\, P(1) = 0 \wedge P'(1) = 0\}$

4/ $F = \ker\varphi$ avec $\varphi : P \in \mathbb{K}_2[X] \mapsto (P(0), P'(0)) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 9. — Dans cet exercice, on note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, on définit sur $\mathbb{R}$ trois fonctions g_1, g_2 et g_3 en posant :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{2x}; \qquad g_2 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\cos\left(x\sqrt{3}\right) \quad \text{et} \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin\left(x\sqrt{3}\right)$$

Enfin on note F le sev de E engendré par les fonctions g_i définies ci-dessus, càd :

$$F = \mathrm{Vect}\,(g_1, g_2, g_3)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{g_1, g_2, g_3\}$ est une base de F.

Exercice 10. — (Une famille libre arbitrairement grande dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Soient $n \geqslant 1$ un entier naturel, et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n réels distincts ; on suppose $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
On considère la famille $F_n = (f_k : x \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha_k x},\ k \in [\![1, n]\!])$. Montrer que F_n est une famille libre de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 11. — Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère la famille de polynômes

$$\mathscr{F} = \left\{ \underbrace{(X-1)(X-2)(X-3)}_{=P_0}, \underbrace{X(X-2)(X-3)}_{=P_1}, \underbrace{X(X-1)(X-3)}_{=P_2}, \underbrace{X(X-1)(X-2)}_{=P_3} \right\}$$

Montrer que $\mathscr{F}$ est libre.

Exercice 12. — **(Transport de bases).** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, $\varphi : E \longrightarrow F$ un isomorphisme de E dans F, et $\mathscr{B} = \{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ une base de E.

On note $\varphi(\mathscr{B}) = \{\varphi(\overrightarrow{v_1}), \ldots, \varphi(\overrightarrow{v_1})\}$ l'image de $\mathscr{B}$ par φ.

Montrer que $\varphi(\mathscr{B})$ est une base de F.

On prouve ainsi l'énoncé :

"L'image d'une base par un isomorphisme est une base"

Exercice 13. — **(Familles échelonnée de polynômes)**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans $\mathbb{K}[X]$, on considère n polynômes $P_1, \ldots, P_n$ tous non nuls.

On suppose que :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$$

Montrer que la famille $\mathscr{F} = (P_1, \cdots, P_n)$ est libre.

On prouve ainsi l'énoncé :

"Toute famille échelonnée de polynômes est libre"

Exercice 14. — **(Challenge)**. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P + XP'' \end{aligned}$$

est bijective (on pourra admettre que f est linéaire).

Exercice 15. — **(Une base classique de $\mathbb{K}_n[X]$).** Soient n un entier naturel non nul, et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire quelconque.

On considère la famille

$$\mathscr{B} = \left\{1, X-\alpha, (X-\alpha)^2, \ldots, (X-\alpha)^n\right\}$$

On se propose de prouver de deux manières différentes que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

1/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2/ Justifier que $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 16. — (Une autre base classique de $\mathbb{K}_n[X]$ — Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit n un entier naturel non nul.

On considère $(n+1)$ scalaires $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ deux à deux distincts.

On note $L_0,\ldots,L_n$ les $(n+1)$ polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux scalaires $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$.

1/ Question de cours : rappeler l'expression du polynôme L_k pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

2/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{L_0, \ldots, L_n\}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 17. — (Supplémentaires). Dans cette partie, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.
On pose $F = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2)$, et on note G le sev des matrices de E de trace nulle.

1/ Déterminer la dimension de F et la dimension de G.

2/ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 18. — (Supplémentaires bis). Dans $E = \mathbb{K}_2[X]$ on considère les sev

$$F = \mathrm{Vect}\,(X^2 + X + 1,\ 5X + 2) \quad \text{et} \quad G = \mathrm{Vect}(X^2 - X).$$

On pourra noter $P_1 = X^2 + X + 1\,;\ P_2 = 5X + 2\,;\ P_3 = X^2 - X$.

1/ Etablir que : $F \cap G = \left\{0_{\mathbb{K}_2[X]}\right\}$.

2/ En déduire que : $\qquad E = F \bigoplus G$.

3/ Justifier que $\mathscr{B}' = \{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 19. — On considère les sev de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x + y = 0 \ \text{ et } \ z + t = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \quad x = y \ \text{ et } \ z = t\}.$$

1/ Déterminer une base de F, puis une base de G.

2/ Montrer que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20. — Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère la partie F constituée des polynômes P tels que $P(1) = P(-1)$.

1/ Montrer que F est un sev de E, en déterminer une base, et en déduire la dimension de F.

2/ Soit $G = \mathrm{Vect}(X)$. Montrer que : $E = F \bigoplus G$.

Exercice 21. — (Très très classique). Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P &\longmapsto P - P' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 22. — (Conséquence du "transport de bases"). Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

On suppose que $\dim(E) = n$, et que E et F sont isomorphes (càd qu'il existe un isomorphisme $\varphi : E \longrightarrow F$ de E dans F).

Etablir que $\dim(F) = n$

On prouve ainsi l'énoncé :

"Deux ev de dimension finie isomorphes ont la même dimension."

Coordonnées dans une base, matrice de passage

Exercice 23. — (Coordonnées dans $\mathbb{R}_3[X]$).

Quelles sont les coordonnées de $P = X^3 + 2X^2 - X + 1$ dans :

1/ la base canonique $\mathscr{B}_1 = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

2/ la base $\mathscr{B}_2 = \left(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3\right)$ de $\mathbb{R}_3[X]$?

3/ la base $\mathscr{B}_3 = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, où les L_1 désignent les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1, 2 et 3 ?

Exercice 24. — (Matrice de passage).

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ deux bases de E.

La **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** notée $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ (ou $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$) est la matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$$

les scalaires α_{ij} étant caractérisés par :

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \quad w_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i$$

Traduction : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ est la matrice obtenue en écrivant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ (attention à l'ordre !).

Illustration : on reprend les notations de la définition.

- E est un ev de dimension n ;
- $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E ;
- $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ est une autre base de E ;

$$\mathrm{P}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{cc} & w_1 \; w_2 \; \cdots \; w_n \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \end{array}$$

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et la base $\mathscr{B}' = (1, 2X - 1, 7X^2 + 3X - 5)$.

La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ notée $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ est : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Questions.

On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

1/ Etablir que la famille B' est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B'.

3/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}.*

Exercice 25. — (Changement de base) Dans cet exercice, on considère l'espace vectoriel $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On rappelle que la **base canonique** de E est la base $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1/ On considère la famille $\mathscr{B}' = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$, où l'on a posé :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

2/ Ecrire la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3/ Justifier brièvement que P est inversible, et calculer P^{-1}.

Exercice 26. — (Coordonnées dans $\mathbb{R}^3$).

On note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Juste pour ôter tout doute : $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose :

$$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}, \qquad \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

et on désigne par $\mathscr{B}'$ la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

1/ Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2/ Ecrire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3/ On pose $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{V}$ dans la base $\mathscr{B}'$?

*. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4}R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.