Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}11 — 13 mai 2023

Durée : 3 heures — Tout matériel électronique interdit

Tous les résultats doivent être encadrés ou soulignés

Le sujet est constitué de 3 exercices

Exercice 1 — (Probabilités)

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges, et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- ➢ si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- ➢ si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le but de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P_F(E)$ ou $P(E|F)$) par :

$$P_F(E) = P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Partie I — Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

2. Calculer $P(X_2 = 1 | X_1 = 1)$ et $P(X_2 = 1 | X_1 = 0)$. En déduire la loi de X_2.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II — Loi de X_n

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathrm{E}(S_n)}{b + r + n}$$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 — (Suites et algèbre linéaire).

On rappelle qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application qui à tout entier naturel n associe un réel u_n.

On appelle **suite réelle indexée par** $\mathbb{Z}$ (et on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) une application qui à tout entier relatif n associe un réel u_n.

On admet que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de E sera noté id_E.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Enfin, on définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall\, x \in \mathscr{C}, \quad S(x) = z, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall\, x \in \mathscr{C}, \quad T(x) = y, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, alors elle est bornée.

4. Montrer que pour tout x de $\mathscr{C}$, $T(x)$ est un élément de $\mathscr{C}$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour S.

6. **Deux sev de $\mathscr{C}$.** Dans $\mathscr{C}$, on considère les parties :

$$F = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_{-n} = x_n\} \qquad \text{et} \qquad G = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_{-n} = -x_n\}$$

On note par ailleurs $\varphi = S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ l'endomorphisme de $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} &\longrightarrow \mathscr{C} \\ x &\longmapsto S(x) - x \end{aligned}$$

a. Déterminer $\ker(\varphi)$.

b. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour G.

c. Montrer que : $\mathscr{C} = F \bigoplus G$.

Exercice 3 — $\boxed{\textbf{(Analyse).}}$

L'objet de ce problème est de trouver un équivalent "utile" de $n!$ au voisinage de $+\infty$, c'est à dire une suite (w_n) dont le terme général ne fait pas intervenir de factorielle, et tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{w_n} = 1$$

Partie I — Un équivalent à préciser

On définit deux suites réelles u et v en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Etablir que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Un développement asymptotique.

a. Donner sans démonstration le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \ln(1+x)$.

b. En déduire que :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

où a, b et c sont trois réels à préciser.

4. En déduire que :

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n^2}$$

où α est un réel à préciser.

➤ **Dans la suite de cet exercice, on admet qu'il existe un réel ℓ tel que :** [*]

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n = \ell$$

∗. D'ici la fin de cette année, nous verrons que c'est une conséquence du résultat précédent.

5. Soit N un entier naturel $\geqslant 2$. Calculer :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N-1} v_n$$

6. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente. On note :

$$L = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Préciser la valeur de L en fonction de ℓ et de u_1.

➤ **A l'issue de cette partie, on a donc établi que :**

$$n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \sqrt{n} \times L$$

Le but de la partie suivante est de préciser la valeur de L.

Partie II — Calcul de L

Pour tout entier naturel n, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que :

- ➤ **Rappel 1.** $W_0 = \dfrac{\pi}{2}\,;\qquad W_1 = 1\,;\qquad W_2 = \dfrac{\pi}{4}$
- ➤ **Rappel 2.** La suite (W_n) est décroissante
- ➤ **Rappel 3.** $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, W_n$
- ➤ **Rappel 4.** $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$

7. Montrer par récurrence sur n que : $\qquad \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, W_{n+1} W_n = \dfrac{\pi}{2}$

8. A l'aide des rappels 2 et 3, établir que :

$$W_{2n+1} \sim_{+\infty} W_{2n}$$

9. Etablir que :

$$W_{2n}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{4n}$$

10. A l'aide de la partie I, du rappel 4 et de la question 9, déterminer la valeur de L.