Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}11 — 13 mai 2023

Exercice 1 — (Probabilités - Extrait de CCINP 2021)

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges, et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

- ➢ si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
- ➢ si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le but de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P_F(E)$ ou $P(E|F)$) par :

$$P_F(E) = P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Partie I — Préliminaires

1. Déterminer la loi de X_1.

D'après l'énoncé, X_1 est égale à 1 si la boule tirée au premier tirage est blanche, 0 si cette boule est rouge. Donc : $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$

En outre, puisque l'urne contient b boules blanches, et $(b + r)$ boules au total, et que ces boules sont indiscernables au toucher, on a : $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_1 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$.

Conclusion. $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$; $P(X_1 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_1 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$. Donc X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

2. Calculer $P\left(X_2 = 1 | X_1 = 1\right)$ et $P\left(X_2 = 1 | X_1 = 0\right)$. En déduire la loi de X_2.

D'après l'énoncé, X_2 est égale à 1 si la boule tirée au second tirage est blanche, 0 si cette boule est rouge. Donc : $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

Si $X_1 = 1$, une boule blanche a été tirée au premier essai. Avant le deuxième tirage, l'urne contient donc $(b+1)$ boules blanches et r boules rouges. Donc : $P\left(X_2 = 1 | X_1 = 1\right) = \dfrac{b+1}{b+r+1}$.

Si $X_1 = 0$, une boule rouge a été tirée au premier essai. Avant le deuxième tirage, l'urne contient donc b boules blanches et $(r+1)$ boules rouges. Donc : $P\left(X_2 = 1 | X_1 = 0\right) = \dfrac{b}{b+r+1}$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(X_2 = 1\right) = P\left(X_2 = 1 | X_1 = 1\right) \times P(X_1 = 1) + P\left(X_2 = 1 | X_1 = 0\right) \times P(X_1 = 0)$$

$$\iff P\left(X_2 = 1\right) = \frac{b+1}{b+r+1} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1} \times \frac{r}{b+r}$$

$$\iff P\left(X_2 = 1\right) = \frac{b(b+1) + br}{(b+r+1)\,(b+r)} = \frac{b(b+r+1)}{(b+r+1)\,(b+r)}$$

D'où : $P\left(X_2 = 1\right) = \dfrac{b}{b+r}$.

Puisque $X_2\left(\Omega\right) = \{0, 1\}$, on en déduit que : $P\left(X_2 = 0\right) = 1 - P\left(X_2 = 1\right) = 1 - \dfrac{b}{b+r} = \dfrac{r}{b+r}$.

Conclusion. $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$; $P(X_2 = 1) = \dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_2 = 0) = \dfrac{r}{b+r}$. Donc X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

D'après l'énoncé, S_n est le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du n-ème tirage.

Toujours selon l'énoncé : $S_n(\Omega) = [\![\, b, b+n \,]\!]$.

Partie II — Loi de X_n

Dans cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $k \in [\![\, b, n+b \,]\!]$, calculer $P\left(X_{n+1} = 1 | S_n = k\right)$.

Si $S_n = k$, l'urne contient à l'issue du n-ème tirage $(b+r+n)$ boules, dont exactement k sont blanches.

Conclusion. $\forall\, k \in [\![\, b, n+b \,]\!], \qquad P\left(X_{n+1} = 1 | S_n = k\right) = \dfrac{k}{b+r+n}$.

5. A l'aide de la formule des probabilités totales, établir que :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{b+r+n}$$

Puisque $S_n(\Omega)=[\![b, b+n]\!]$, la famille d'évènements $\{S_n=k,\ k\in[\![b, n+b]\!]\}$ est un système complet d'évènements. Il est donc légitime d'appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=b}^{n+b} P\left(X_{n+1}=1\cap S_n=k\right)=\sum_{k=b}^{n+b} P\left(X_{n+1}=1|S_n=k\right)\times P(S_n=k) \\ &= \frac{1}{b+r+n}\sum_{k=b}^{n+b} k\times P(S_n=k) \end{aligned}$$

Or : $\mathrm{E}\left(S_n\right)=\displaystyle\sum_{k=b}^{n+b} k\times P(S_n=k)$.

Conclusion. $P(X_{n+1}=1)=\dfrac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{b+r+n}$

6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ l'assertion : "X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$".

L'assertion $P(1)$ est vraie, selon la question 1.

Supposons à présent $P(n)$ vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et par linéarité de l'espérance, on a :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{\mathrm{E}\left(S_n\right)}{b+r+n}=\frac{\mathrm{E}\left(S_{n-1}+X_n\right)}{b+r+n}=\frac{\mathrm{E}\left(S_{n-1}\right)}{b+r+n}+\frac{\mathrm{E}\left(X_n\right)}{b+r+n}\quad(\spadesuit)$$

Or : $\mathrm{E}\left(S_{n-1}\right)=(b+r+n-1)P(X_n=1)=\dfrac{(b+r+n-1)b}{b+r}$ $(\clubsuit)$ (la première égalité provenant de la question précédente, la seconde de l'hypothèse de récurrence).

De plus : $\mathrm{E}\left(X_n\right)=\dfrac{b}{b+r}$ $(\heartsuit)$ puisque par hypothèse de récurrence X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $b/(b+r)$.

D'après $(\spadesuit)$, $(\clubsuit)$ et $(\heartsuit)$, on a :

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{(b+r+n-1)b}{(b+r)(b+r+n)}+\frac{b}{(b+r)(b+r+n)}=\frac{(b+r+n)b}{(b+r)(b+r+n)}=\frac{b}{b+r}$$

En résumé : $X_{n+1}(\Omega)=\{0,1\}$; $P(X_{n+1}=1)=\dfrac{b}{b+r}$ et $P(X_{n+1}=0)=\dfrac{r}{b+r}$. Donc X_{n+1} suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$. D'où $P(n+1)$ est vraie, ce qui achève la preuve de l'hérédité.

Conclusion. X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2 — **(Suites et algèbre linéaire - Extrait de e3a 2020).**

On rappelle qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application qui à tout entier naturel n associe un réel u_n.

On appelle **suite réelle indexée par** $\mathbb{Z}$ (et on note $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$) une application qui à tout entier relatif n associe un réel u_n.

On admet que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'endomorphisme identité de E sera noté id_E.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Enfin, on définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall x \in \mathscr{C}, \quad S(x) = z, \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

et

$$\forall x \in \mathscr{C}, \quad T(x) = y, \quad \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

Soit u la suite définie en posant : $\forall n \in \mathbb{Z},\ u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$. Alors pour tout entier naturel n on a : $u_n = u_{-n} = \dfrac{1}{n^2+1}$.

En particulier, les sous-suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes (et ont pour limite 0).

Conclusion. La suite $\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un exemple de suite non constante appartenant à $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

Par définition de $\mathscr{C}$, on a déjà l'inclusion : $\mathscr{C} \subset E$.

Le vecteur nul de E, c'est-à-dire la suite nulle $(0)_{n\in\mathbb{Z}}$, appartient à $\mathscr{C}$ puisque les deux sous-suites extraites de celle-ci convergent toutes deux vers 0.

Montrons à présent que $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire : soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux éléments de $\mathscr{C}$, et soient λ et μ deux réels.

Puisque x et y sont dans $\mathscr{C}$, les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, et il existe donc 4 réels ℓ_+, ℓ_-, ℓ'_+ et ℓ'_- tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_+ \,; \quad \lim_{n\to+\infty} x_{-n} = \ell_- \,; \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \ell'_+ \,; \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \ell'_-$$

Par opérations élémentaires sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda x + \mu y)_n = \lambda\ell_+ + \mu\ell'_+ \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} (\lambda x + \mu y)_{-n} = \lambda\ell_- + \mu\ell'_-$$

Ainsi la suite $\lambda x + \mu y$ appartient à $\mathscr{C}$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.

Conclusion. $\mathscr{C}$ est une partie de E, contenant le vecteur 0_E nul de E, et stable par combinaison linéaire : $\mathscr{C}$ est donc un sous-espace vectoriel de E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, alors elle est bornée.

D'après le cours, toute suite (définie sur $\mathbb{N}$) convergente est bornée.

Soit x une suite de $\mathscr{C}$. Par définition, les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, donc bornées. D'où :

$$\exists\,(M_+, M_-) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leqslant M_+ \quad \text{et} \quad |x_{-n}| \leqslant M_-$$

D'où : $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ |x_n| \leqslant \max(M_+, M_-)$. Ce qui assure que x est bornée.

Conclusion. Toute suite x de $\mathscr{C}$ est bornée.

4. Montrer que pour tout x de $\mathscr{C}$, $T(x)$ est un élément de $\mathscr{C}$.

Soit x une suite de $\mathscr{C}$: notons $y = T(x)$.

Par définition de l'application T, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}$.

La suite x étant dans $\mathscr{C}$, il existe deux réels ℓ_+ et ℓ_- tels que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell_+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{-n} = \ell_-$.

D'après la propriété fondamentale des suites extraites, et par opérations sur les limites, on en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 2\ell_+$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{-n} = 2\ell_-$.

En particulier les sous-suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ extraites de y sont convergentes. Donc $y \in \mathscr{C}$.

Conclusion. Pour tout x de $\mathscr{C}$, $T(x)$ est un élément de $\mathscr{C}$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour S.

Soient x et w deux suites de $\mathscr{C}$, λ et μ deux réels.

Notons $X = T(x)$ et $W = T(w)$, de telle sorte que :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ X_n = x_{n-1} + x_{n+1} \quad \text{et} \quad W_n = w_{n-1} + w_{n+1}$$

Notons encore $Z = T(\lambda x + \mu w)$. Par définition de l'application T, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ Z_n = (\lambda x + \mu w)_{n-1} + (\lambda x + \mu w)_{n+1} = \lambda x_{n-1} + \mu w_{n-1} + \lambda x_{n+1} + \mu w_{n+1}$$

$$= \lambda\,(x_{n-1} + x_{n+1}) + \mu\,(w_{n-1} + w_{n+1}) = \lambda X_n + \mu W_n$$

En résumé : $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ Z_n = \lambda X_n + \mu W_n$. Ainsi : $T(\lambda x + \mu w) = \lambda T(x) + \mu T(w)$.

Conclusion. T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$.

6. Deux sev de $\mathscr{C}$. Dans $\mathscr{C}$, on considère les parties :

$$F = \{x \in \mathscr{C},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x_{-n} = x_n\} \qquad \text{et} \qquad G = \{x \in \mathscr{C},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ x_{-n} = -x_n\}$$

On note par ailleurs $\varphi = S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ l'endomorphisme de $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} &\longrightarrow \mathscr{C} \\ x &\longmapsto S(x) - x \end{aligned}$$

a. Déterminer $\ker(\varphi)$.

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{C}$. On a :

$x \in \ker\varphi \iff \varphi(x) = 0 \iff S(x) - x = 0 \iff S(x) = x \iff \forall n \in \mathbb{Z},\ x_{-n} = x_n \iff x \in F.$

Conclusion. $\ker\varphi = F$.

b. Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour G.

D'après la question précédente, $F = \ker\varphi$. F est donc un sev de $\mathscr{C}$ (le noyau d'une application linéaire est un sev de l'ev de définition).

Remarque : on ne le demandait pas, mais on a évidemment : $G = \ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ (ce qui justifie que G est un sev de $\mathscr{C}$ également).

c. Montrer que : $\mathscr{C} = F \bigoplus G$.

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On définit deux suites y et z indexées par $\mathbb{Z}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad y_n = \frac{x_n + x_{-n}}{2} \text{ et } z_n = \frac{x_n - x_{-n}}{2}$$

On vérifie aisément que $y \in S$, $z \in G$ et $x = y + z$.*

Par suite : $\forall x \in \mathscr{C},\ \exists (y,z) \in F \times G,\ x = y + z$. Donc : $\mathscr{C} = F + G$ $\qquad$ (♠).

Considérons à présent une suite $x \in F \cap G$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ x_{-n} = x_n = -x_n \text{ d'où : } \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = 0$$

Donc x est la suite nulle. On en déduit que : $F \cap G = \{0_{\mathscr{C}}\}$ $\qquad$ (♣).

Conclusion. D'après (♠) et (♣) : $\mathscr{C} = F \bigoplus G$.

*. C'est le même principe de preuve que pour le théorème de décomposition "paire + impaire".

Exercice 3 — $\boxed{\textbf{(Analyse - Extrait de un peu partout, un peu tout le temps...)}}$.

L'objet de ce problème est de trouver un équivalent "utile" de $n!$ au voisinage de $+\infty$, c'est à dire une suite (w_n) dont le terme général ne fait pas intervenir de factorielle, et tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{w_n} = 1$$

Partie I — Un équivalent à préciser

On définit deux suites réelles u et v en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Etablir que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

D'après l'énoncé :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-n-1}\sqrt{n+1}\,n!} = \frac{(n+1)\mathrm{e}n^n}{(n+1)^{n+1}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

soit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e} \times \frac{n^n}{(n+1)^n} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/2}$$

Finalement :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e} \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{e}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$

2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

D'après la question précédente :

$$v_n = \ln\left(\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}\right) = \ln(\mathrm{e}) - \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

3. Un développement asymptotique.

a. Donner sans démonstration le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

D'après le cours : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

b. En déduire que :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

où a, b et c sont trois réels à préciser.

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

4. En déduire que :

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{\alpha}{n^2} \qquad \text{(où } \alpha \text{ est un réel à préciser)}$$

D'après les questions 2 et 3-b, on a :

$$v_n = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

d'où :

$$v_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

d'où :

$$v_n = -\frac{1}{12n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Conclusion. $v_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{12n^2}$

➤ **Dans la suite de cet exercice, on admet qu'il existe un réel ℓ tel que :**[†]

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} v_n = \ell$$

5. Soit N un entier naturel $\geqslant 2$. Calculer :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N-1} v_n$$

On a :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right] \underbrace{=}_{\text{télescopique}} \ln(u_N) - \ln(u_1)$$

Conclusion. $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ S_N = \ln(u_N) - \ln(u_1)$

6. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente. On note :

$$L = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Préciser la valeur de L en fonction de ℓ et de u_1.

D'après l'indication de l'énoncé et la question précédente :

$$\lim_{N \to +\infty} \left[\ln(u_N) - \ln(u_1)\right] = \ell$$

On en déduit que (par opérations algébriques sur les limites) :

$$\lim_{N \to +\infty} \ln(u_N) = \ell + \ln(u_1)$$

D'où (par limite séquentielle) :

$$\lim_{N \to +\infty} u_N = u_1\, \mathrm{e}^{\ell}$$

Conclusion. La suite (u_n) est convergente et $L = \lim_{n \to +\infty} u_n = u_1\, \mathrm{e}^{\ell}$

➤ **A l'issue de cette partie, on a donc établi que :**

$$n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \sqrt{n} \times L$$

Le but de la partie suivante est de préciser la valeur de L.

†. D'ici la fin de cette année, nous verrons que c'est une conséquence du résultat précédent.

Partie II — Calcul de L

Pour tout entier naturel n, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que :

- **Rappel 1.** $W_0 = \dfrac{\pi}{2}\,;\qquad W_1 = 1\,;\qquad W_2 = \dfrac{\pi}{4}$
- **Rappel 2.** La suite (W_n) est décroissante
- **Rappel 3.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, W_n$
- **Rappel 4.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$

7. Montrer par récurrence sur n que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\,W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$

Pour tout entier naturel n, posons $a_n = (n+1)\,W_{n+1}W_n$.

On a : $a_{n+1} = (n+2)\,W_{n+2}W_{n+1} = (n+2)\,\dfrac{n+1}{n+2}\,W_nW_{n+1} = (n+1)\,W_{n+1}W_n = a_n$.

Il s'ensuit que la suite (a_n) est constante. Or : $a_0 = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après l'énoncé).

Conclusion. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+1)\,W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$

8. A l'aide des rappels 2 et 3, établir que :

$$W_{2n+1} \sim_{+\infty} W_{2n}$$

La suite (W_n) étant décroissante (rappel 2), on a pour tout entier naturel n : $W_{2n+2} \leqslant W_{2n+1} \leqslant W_{2n}$.

Il s'ensuit, puisque $W_{2n} > 0$, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{W_{2n+2}}{W_{2n}} \leqslant \dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leqslant 1$

D'après le rappel 3, on en déduit que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{2n+1}{2n+2} \leqslant \dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \leqslant 1$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2n+2} = 1$, on en déduit par encadrement que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = 1$.

Conclusion. $W_{2n+1} \sim_{+\infty} W_{2n}$

9. Etablir que :

$$W_{2n}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi}{4n}$$

Soit n un entier naturel. D'après la question 7 :

$$(2n+1)\, W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2} \qquad \text{d'où :} \qquad W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

Or d'après la question précédente : $W_{2n+1}W_{2n} \sim_{+\infty} W_{2n}^2$; et $(2n+1) \sim_{+\infty} 2n$

Conclusion. On en déduit que : $W_{2n}^2 \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{4n}$

10. A l'aide de la partie I, du rappel 4 et de la question 9, déterminer la valeur de L.

Soit n un entier naturel. D'après le rappel 4 :

$$W_{2n}^2 = \frac{\left((2n)!\right)^2}{4^{2n}\,(n!)^4} \times \frac{\pi^2}{4} \qquad (\spadesuit)$$

Par ailleurs, selon le résultat final de la partie I donné dans l'énoncé, on a :

$$n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \sqrt{n} \times L \quad \text{et} \quad (2n!) \sim_{+\infty} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \times \sqrt{2n} \times L \qquad (\clubsuit)$$

D'après ($\spadesuit$) et ($\clubsuit$) :

$$W_{2n}^2 \sim_{+\infty} \frac{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} \times 2n \times L^2}{4^{2n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{4n} \times n^2 \times L^4} \times \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{d'où :} \quad W_{2n}^2 \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{2nL^2} \qquad (\heartsuit)$$

On déduit de ($\heartsuit$) et de la question 9 que :

$$\frac{\pi^2}{2L^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{d'où :} \quad L^2 = 2\pi$$

Puisqu'il est clair que L est un réel positif (c'est la limite d'une suite réelle positive), on a : $L = \sqrt{2\pi}$.

Conclusion. On a : $L = \sqrt{2\pi}$

On a ainsi établi la **formule de Stirling** :

$$n! \sim_{+\infty} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \times \sqrt{2\pi n}$$