Colle 26 – Questions de cours

Question de cours n°1 — **Propriété** : soient $v_1,\dots,\ v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. La famille $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est liée SSI il existe un entier $i \in [\![\,1,n\,]\!]$ tel que : $v_i \in \text{Vect}\,(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)$.

Raisonnement par double implication.

➤ Sens direct. Supposons que la famille $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est liée. Alors il existe $(\alpha_1,\dots\alpha_n) \in \mathbb{K}^n\backslash\{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = 0$. Puisque le n-uplet est non nul, il existe $i \in [\![\,1,n\,]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$. On peut alors écrire :

$$\alpha_i v_i = -\sum_{k=1,k\neq i}^{n}\alpha_k v_k \quad \text{d'où} \quad v_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{n}\beta_k v_k \text{ en ayant posé : } \beta_k = -\frac{\alpha_k}{\alpha_i}.$$

Par suite : $v_i \in \text{Vect}\,(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)$ ce qui prouve la première implication.

➤ Réciproque. Supposons qu'il existe $i \in [\![\,1,n\,]\!]$ tel que $v_i \in \text{Vect}\,(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)$. Alors il existe $(n-1)$ scalaires $\alpha_1,\dots,\widehat{\alpha_i},\dots,\alpha_n$ tels que : $v_i = \sum_{k=1,k\neq i}^{n}\alpha_k v_k$. Il existe donc n scalaires $\beta_1,\dots,\beta_n$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k v_k = 0$ (en ayant posé $\beta_k = \alpha_k$ pour tout $k \neq i$, et $\alpha_i = -1$). D'où la famille $\mathscr{F}$ est liée, ce qui achève la preuve de la seconde implication.

Conclusion. $\mathscr{F} = (v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est liée SSI il existe un entier $i \in [\![\,1,n\,]\!]$ tel que : $v_i \in \text{Vect}\,(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)$.

Question de cours n°2 — **Corollaire (du théorème de la base extraite)** : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n, et F un sev de E. Alors : 1) $\dim F \leqslant n$; 2) $\dim F = n$ SSI $F = E$.

1) Soit F un sev de E. Puisque F est de dimension finie (que l'on peut supposer non nulle*), F admet une base $\mathscr{F}$, de cardinal égal à $\dim(F)$ (par définition de dimension). Cette base $\mathscr{F}$ est en particulier une famille libre de vecteurs de E ; à ce titre, son cardinal est majoré par $\dim(E)$.† En d'autres termes : $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

2) Supposons que $\dim F = n$. Alors F admet une base $\mathscr{F}$ de cardinal n. Cette base $\mathscr{F}$ est en particulier une famille libre de vecteurs de E. On en déduit que $\mathscr{F}$ est une base de E, puisqu'une famille de E est une base dès qu'elle est libre et que son cardinal est égal à la dimension de E. Par conséquent : $E = \text{Vect}(\mathscr{F}) = F$.

On a ainsi montré l'implication : $[\dim(F) = n] \Longrightarrow [F = E]$. La réciproque est triviale.

Question de cours n°3 — **Propriété** : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors : $E = H \bigoplus \text{Vect}\,(v)$.

Commençons par observer que $H \subset H + \text{Vect}\,(v) \subset E$. Il s'ensuit que : $n-1 \leqslant \dim\,(H + \text{Vect}\,(v)) \leqslant n$.

Supposons que : $\dim\,(H + \text{Vect}\,(v)) = n-1$. Alors : $H + \text{Vect}\,(v) = H$ puisque H est contenu dans $(H + \text{Vect}\,(v))$ et que ces deux espaces auraient alors la même dimension. Cette égalité impliquerait $v \in H$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Par suite : $\dim\,(H + \text{Vect}\,(v)) = n$, ce qui entraîne : $\boxed{H + \text{Vect}\,(v) = E \quad (\clubsuit)}$.

Par ailleurs : $\left\{\overrightarrow{0}_E\right\} \subset (H \cap \text{Vect}\,(v)) \subset \text{Vect}\,(v)$. Il s'ensuit que : $0 \leqslant \dim\,(H \cap \text{Vect}\,(v)) \leqslant 1$.

Supposons que : $\dim\,(H \cap \text{Vect}\,(v)) = 1$. Alors : $H \cap \text{Vect}\,(v) = \text{Vect}(v)$ puisque $H \cap \text{Vect}\,(v)$ est contenu dans $\text{Vect}\,(v)$ et que ces deux espaces auraient alors la même dimension. De nouveau, cette égalité impliquerait $v \in H$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Par suite : $\dim\,(H \cap \text{Vect}\,(v)) = 0$, ce qui entraîne : $\boxed{H \cap \text{Vect}\,(v) = \left\{\overrightarrow{0}_E\right\} \quad (\spadesuit)}$.

D'après $(\clubsuit)$ et $(\spadesuit)$, on peut conclure que : $\boxed{E = H \bigoplus \text{Vect}\,(v)}$, ce qu'il fallait démontrer.

---

*. Si $F = \{0\}$, alors $\dim(F) = 0$.

†. Puisque dans un espace vectoriel de dimension n, une famille libre possède au plus n éléments.

Question de cours n^{0}4 — **Propriété (effet d'un changement de base sur les coordonnées)** : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Pour tout vecteur V de E, notons $X_{\mathscr{B}}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ les n-uplets de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. On a : $X_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}$.

➤ Notations et remarques préliminaires. Soient $\mathscr{B} = (v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\mathscr{B}' = (w_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux bases de E.
On note $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = (a_{ij})$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, où les scalaires a_{ij} sont caractérisés par : $\forall\, j \in [\![\, 1, n \,]\!], \quad w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$.

Soit v un vecteur de E. Il existe $2n$ scalaires $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ tels que : $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$.

Ainsi le n-uplet des coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{B}'$) est : $X_{\mathscr{B}} = (x_1, \dots, x_n)$ (*resp.* $X_{\mathscr{B}'} = (y_1, \dots, y_n)$).

Ces notations étant posées, observons à présent que l'égalité de l'énoncé peut être traduite par :

$$\boxed{[X_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}] \Longleftrightarrow \left[\forall\, i \in [\![\, 1, n \,]\!],\ x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\right] \quad (\spadesuit)}$$

➤ On a : $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j w_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j\right) v_i$ et $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

On déduit de ces deux égalités et de l'unicité des coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$ que : $\forall\, i \in [\![\, 1, n \,]\!],\ x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, ce qui à la lumière de ($\spadesuit$) permet de conclure : $\boxed{X_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}}$.

Question de cours n^{0}5 — **Exercice** : soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la famille $\mathscr{B}' = \left(X^2 - 1, X + 1, X\right)$.
1) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.
2) A l'aide d'une matrice de passage, déterminer les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathscr{B}'$.

1) Dans cette situation, la famille $\mathscr{B}'$ n'est pas une famille échelonnée de polynômes, et on doit donc utiliser la définition de famille libre pour établir que $\mathscr{B}'$ l'est.

Supposons donc qu'il existe trois réels a, b et c tels que $a\left(X^2 - 1\right) + b\,(X + 1) + cX = \widetilde{0}$. L'évaluation de cette relation en (-1) donne $c = 0$. Dans un second temps, on évalue $a\left(X^2 - 1\right) + b\,(X + 1) = \widetilde{0}$ en 1, ce qui donne $b = 0$. On en déduit finalement $a = 0$. Par suite, la famille $\mathscr{B}'$ est libre, et puisque son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, on peut conclure : $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

2) La matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ à la base $\mathscr{B}' = \left(X^2 - 1, X + 1, X\right)$ est :

$$\boxed{P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Cette matrice est inversible (comme toute matrice de passage) et :

$$P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 & = & b_2 \\ x_1 & = & b_3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & b_1 + b_3 \\ x_3 & = & b_2 - b_1 - b_3 \\ x_1 & = & b_3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\boxed{P_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}^{-1} = P_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons $X_{\mathscr{B}}$ (*resp.* $X_{\mathscr{B}'}$) le triplet des coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{B}'$). On a :

$$X_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \text{ et } X_{\mathscr{B}'} = \mathscr{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}} \text{ d'où : } X_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \text{ soit : } \boxed{X_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} a \\ a + c \\ b - (a + c) \end{pmatrix}}$$

➤ $\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3,\ aX^2 + bX + c = a\left(X^2 - 1\right) + (a + c)\,(X + 1) + (a - (b + c))\,X}$

Question de cours n^{0}6 — **Théorème (existence d'un supplémentaire en dimension finie)** : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F un sev de E. Il existe un sev G de E tel que : $E = F \bigoplus G$.

Notons $n = \dim E$, et considérons F un sev de E. F est de dimension finie (notons $p = \dim F$) et on a $0 \leqslant p \leqslant n$. Lorsque $p = 0$ ou $p = n$, la propriété est immédiate ($E = \{0\} \bigoplus E = E \bigoplus \{0\}$).

Par la suite, on peut donc supposer que : $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Puisque F est un espace vectoriel non nul, il admet une base : $\mathscr{B}_0 = (v_1, \dots, v_p)$. Cette base est en particulier une famille libre de E ; d'après le théorème de la base incomplète, il existe $(n-p)$ vecteurs w_1,..., w_{n-p} de E tels que la famille $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p})$ est une base de E.

Montrons que : $E = F \bigoplus G$ avec $G = \text{Vect}\,(w_1, \dots, w_{n-p})$.

➤ Primo, observons que : $F + G = \text{Vect}\,(v_1, \dots, v_p) + \text{Vect}\,(w_1, \dots, w_{n-p})$ d'où : $F + G = \text{Vect}\,(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_{n-p})$. Or la famille $\mathscr{B}$ étant une base de E, elle est en particulier génératrice de E. On en déduit que : $\boxed{F + G = E \ \ (\spadesuit)}$.

➤ Soit $V \in F \cap G$. Alors il existe n scalaires α_1,...,α_p,β_1,...,β_{n-p} tels que : $V = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i = \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j w_j$. On en déduit que : $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i - \sum_{j=1}^{n-p} \beta_j w_j = 0$. Puisque $\mathscr{B}$ est en particulier une famille libre de E, on en déduit que tous les α_i et tous les β_j sont nuls. Par suite : $V = 0$. D'où : $\boxed{F \cap G = \{0\} \ \ (\clubsuit)}$.

➤ On déduit alors de ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et de la caractérisation des sev supplémentaires que $E = F \bigoplus G$.

Conclusion. Tout sev d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie E admet un supplémentaire dans E.

Question de cours n^{0}7 — **Théorème (des 4 dimensions)** : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F et G deux sev de E. Alors : $\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)$

➤ Puisque F et G sont deux sev de E, et que E est de dimension finie, F et G sont également de dimension finie. L'intersection $F \cap G$ est donc elle aussi de dimension finie. Par suite $F \cap G$ admet un supplémentaire dans F que nous noterons H ; on a donc $\boxed{(F \cap G) \bigoplus H = F \quad (\spadesuit)}$.

➤ Montrons que H et G sont supplémentaires dans $F + G$

En premier lieu : $H + (F \cap G) = F$, d'où $H + (F \cap G) + G = F + G$. Or puisque $(F \cap G) \subset G$, on a : $H + (F \cap G) + G = H + G$. Par suite : $F + G = H + G$.

En second lieu : $H \cap G = (H \cap F) \cap G$ car H est inclus dans F, ce qui implique : $(H \cap F) = F$. On en déduit, par associativité de l'intersection que : $H \cap G = H \cap (F \cap G)$. Or $H \cap (F \cap G) = \{0_E\}$ car H et $(F \cap G)$ sont supplémentaires dans F par hypothèse.

Donc : $\boxed{F + G = H \bigoplus G \quad (\clubsuit)}$.

On déduit de ($\spadesuit$)[‡] que : $\dim H = \dim F - \dim\,(F \cap G)$. Et on déduit de ($\clubsuit$) que : $\dim H = \dim\,(F+G) - \dim G$. En identifiant les deux expressions obtenues pour $\dim H$, on obtient : $\dim F - \dim\,(F \cap G) = \dim\,(F+G) - \dim G$ puis la conclusion : $\boxed{\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)}$.

Remarque : deux résultats peuvent être admis pour cette preuve. Celui donnant la dimension d'une somme directe de sev (évoquée plus haut), et celui donnant l'existence d'un supplémentaire : dans un ev E de dimension finie, tout sev admet un supplémentaire dans E.

‡. Et de la formule donnant la dimension d'une somme directe : $\dim\,(F_1 \bigoplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$.

QUESTION DE COURS N^{0}8 — **Propriété** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, avec E de dimension $n \geqslant 1$; $\mathscr{B} = (v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base de E ; et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Enfin on note $\mathscr{F} = (f(v_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$. Alors :
1) [f est injective] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est libre]
2) [f est surjective] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est génératrice de F]
3) [f est un isomorphisme] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est une base de F]

➤ Montrons le point 1 : raisonnons par double implication.

➢ Montrons que [f est injective] $\Longrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est libre]. On suppose f injective.

Supposons qu'il existe n scalaires $\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(v_i) = 0_F$

Alors, par linéarité de f on a : $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) = 0_F$

Puisque f est injective, on en déduit que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = 0_E$. Et comme les vecteurs v_i sont linéairement indépendants, on a : $\forall\, i \in[\![\,1,n\,]\!],\ \alpha_i = 0$. Donc $\mathscr{F}$ est libre. **Conclusion** : [f est injective] $\Longrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est libre].

➢ Montrons que réciproquement [$\mathscr{F}$ est libre] $\Longrightarrow$ [f est injective]. On suppose que la famille $\mathscr{F}$ est libre.

Soit $V \in \ker f$. Puisque les vecteurs v_i constituent une base de E : $\exists!\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,\ V = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$.

Ainsi :

$$[V\in\ker f] \Longleftrightarrow [f(V) = 0_F] \Longleftrightarrow \left[f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right) = 0_F\right] \Longleftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(v_i) = 0_F\right] \Longleftrightarrow [\forall\, i\in[\![\,1,n\,]\!],\ \alpha_i = 0]$$

l'avant dernière équivalence provenant de la linéarité de f, et la dernière de l'hypothèse de liberté faite sur $\mathscr{F}$. Il s'ensuit que $V = 0_E$. Par suite $\ker f = \{0_E\}$.
Donc f est injective. **Conclusion** : [$\mathscr{F}$ est libre] $\Longrightarrow$ [f est injective].

Finalement : [f est injective] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est libre].

➤ Montrons le point 2 : [§]

$$[f \text{ est surjective}] \Longleftrightarrow [\mathrm{Im}\, f = F] \Longleftrightarrow \left[\mathrm{Vect}\left((f(v_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right) = F\right] \Longleftrightarrow [\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = F]$$
$$\Longleftrightarrow [\mathscr{F} \text{ est une famille génératrice de } F]$$

➤ Montrons le point 3 : [f est un isomorphisme] $\Longleftrightarrow$ [f est injective et surjective] $\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est libre et génératrice de F]
$\Longleftrightarrow$ [$\mathscr{F}$ est une base de F]

QUESTION DE COURS N^{0}9 — **Théorème (classification des ev de dimension finie)** : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n non nulle. [¶] E admet une base $\mathscr{B} = (v_1,\ldots,v_n)$. On définit alors les applications

$$\varphi :\ \mathbb{K}^n \longrightarrow E,\quad (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i \qquad \text{et} \qquad \psi :\ E \longrightarrow \mathbb{K}^n,\quad V \longmapsto (x_1,\ldots,x_n)$$

où l'on a noté $(x_1,\ldots,x_n)$ le n-uplet des coordonnées du vecteur V dans la base $\mathscr{B}$.
Il est immédiat que φ et ψ sont linéaires, et que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre. On en déduit que φ et ψ sont des isomorphismes, d'où la conclusion : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

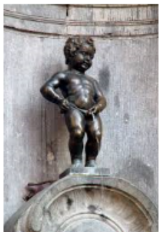
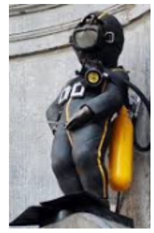
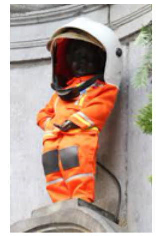
---

§. La preuve de ce point repose en grande partie sur la célèbre **propriété** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f\in\mathscr{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe une famille $(v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ génératrice de E, c'est-à-dire une famille de vecteurs de E tels que $E = \mathrm{Vect}\left((v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$. Alors : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\left((f(v_i))_{i\in[\![1,n]\!]}\right)$.

¶. Sinon $E = \{0\}$ et il n'y a pas grand chose à faire.

Interprétation : à un isomorphisme près, il existe un unique $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, qui est $\mathbb{K}^n$.

Interprétation libre... A un costume près, il existe un unique Manneken-Pis.

De la même manière :

- ➤ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus un : $\mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$;
- ➤ l'espace vectoriel F des solutions (à valeurs réelles) de l'équation différentielle linéaire $y'' - 3y' + 2y = 0$, càd : $F = \text{Vect}\left(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\right)$;
- ➤ l'espace vectoriel D des matrices diagonales dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $D = \text{Vect}(E_{11}, E_{22})$;
- ➤ l'espace vectoriel E des suites récurrentes réelles linéaires d'ordre 2 satisfaisant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, càd :
$$E = \text{Vect}\left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$

sont quatre costumes différents pour le même $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Compléments

Complément n^{0}1 — **Propriété** : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($n \neq 0$), soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E. On a : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}$.

➤ Notations et remarques préliminaires. Soient $\mathscr{B} = (v_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, $\mathscr{B}' = (w_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $\mathscr{B}'' = (z_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ trois bases de E. On note :

— $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = (a_{ij})$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, où les scalaires a_{ij} sont caractérisés par :
$$\forall\, j \in [\![\, 1, n\,]\!],\quad w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i.$$

— $\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''} = (b_{ij})$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}''$, où les scalaires b_{ij} sont caractérisés par :
$$\forall\, j \in [\![\, 1, n\,]\!],\quad z_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} w_i.$$

— $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}''} = (c_{ij})$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}''$, où les scalaires c_{ij} sont caractérisés par :
$$\forall\, j \in [\![\, 1, n\,]\!],\quad z_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i.$$

Avec ces notations, on peut reformuler la propriété à démontrer :
$$[\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}] \Longleftrightarrow \left[\forall\,(i,j) \in [\![\, 1, n\,]\!]^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right]$$

➤ Soit j un entier compris entre 1 et n. On a d'une part : $\boxed{z_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} v_i\ \ (\spadesuit)}$.

Et d'autre part : $z_j = \sum_{k=1}^n b_{kj} w_k = \sum_{k=1}^n b_{kj}\left(\sum_{i=1}^n a_{ik} v_i\right)$ donc : $\boxed{z_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik}\right) v_i\ \ (\clubsuit)}$.

On déduit alors de ($\spadesuit$), ($\clubsuit$) et de l'unicité des coordonnées de z_j dans la base $\mathscr{B}$ que : $\forall\, i \in [\![\, 1, n\,]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik}$.

L'entier j étant arbitraire dans ce raisonnement, on peut conclure que : $\forall\, i \in [\![\, 1, n\,]\!],\ \forall\, j \in [\![\, 1, n\,]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{kj} a_{ik}$.

Par suite : $\boxed{\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}\mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}}$.

Complément n^{0}2 — **Théorème de la base extraite** : soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie. De toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie, et $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille génératrice de E. Deux cas peuvent se présenter :

➤ Soit $\mathscr{F}$ est libre : auquel cas $\mathscr{F}$ est alors une base de E, et on a gagné.

➤ Soit $\mathscr{F}$ est liée : auquel cas il existe un vecteur v_i qui s'exprime comme combinaison linéaire des $n-1$ autres vecteurs de la famille $\mathscr{F}$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que : $v_n \in \text{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$. Il s'ensuit que la famille $\mathscr{F}' = \text{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est génératrice de E.

On recommence la discussion avec la famille $\mathscr{F}'$: soit elle est libre et c'est une base, soit elle est liée et on peut alors exprimer v_{n-1} comme combinaison linéaire des $n-2$ autres vecteurs de $\mathscr{F}'$...

Ce processus itératif se termine nécessairement (en un nombre fini d'étapes) car le cardinal de $\mathscr{F}$ est fini (et au pire, on obtiendra une base constituée d'un seul vecteur non nul, puisque E est supposé non nul).

Conclusion. De toute famille génératrice d'un ev non nul de dimension finie, on peut extraire une base.

Complément n^{0}3 — **Théorème de la base incomplète** : soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie. Toute famille libre de vecteurs de E peut être complétée en une base de E.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n, $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille libre de E, et $\mathscr{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ une base de E. Deux cas peuvent se présenter :

➤ Soit $\mathscr{F}$ est génératrice : auquel cas elle est de cardinal n, et il n'y a aucun vecteur à lui adjoindre pour obtenir une base de E (c'en est déjà une !).

➤ Soit $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice : auquel cas il existe un vecteur $w_i \notin \text{Vect}(\mathscr{F})$. Sans nuire à la généralité, on peut supposer qu'il s'agit de w_1. On considère alors la nouvelle famille $\mathscr{F}' = (v_1, \ldots, v_p, w_1)$; celle-ci est libre (essentiellement car $w_1 \notin \text{Vect}(\mathscr{F})$, et que $\mathscr{F}$ est libre).

Deux cas se présentent pour la famille $\mathscr{F}'$: soit elle est génératrice, soit elle ne l'est pas. Dans le second cas, on peut supposer que $w_2 \notin \text{Vect}(\mathscr{F}')$, et on considère la nouvelle famille libre $\mathscr{F}'' = (v_1, \ldots, v_p, w_1, w_2)$...

Comme dans la preuve précédente, ce processus itératif ne comporte qu'un nombre fini d'étapes, puisque la famille $\mathscr{B}$ est de cardinal fini. Mieux, puisque E est de dimension n, on sait que ce processus comporte exactement $(n-p)$ étapes, pour obtenir une base $\mathscr{B}' = (v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{n-p})$ de E.

Conclusion. Toute famille libre d'un ev E non nul de dimension finie est contenue dans une base de E.

Complément n^{0}4 — **Exercice** : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$, et soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

D'après la formule des quatre dimensions : $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

On a : $H_1 \subset (H_1 + H_2) \subset E$. D'où : $n - 1 \leqslant \dim(H_1 + H_2) \leqslant n$.

Supposons que $\dim(H_1 + H_2) = n-1$. Alors : $H_1 = H_1 + H_2$ (puisqu'alors $H_1 \subset (H_1 + H_2)$ et $\dim H_1 = \dim(H_1 + H_2)$). Or par hypothèse, H_1 et H_2 sont distincts, donc il existe $h_2 \in H_2 \backslash H_1$, et donc $H_1 \neq H_1 + H_2$.

Il s'ensuit que : $\dim(H_1 + H_2) = n$. Par conséquent : $n = 2(n-1) + \dim(H_1 \cap H_2)$, d'où : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Conclusion. Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geqslant 2$, l'intersection de deux hyperplans distincts est dimension $n-2$.

Complément n^{0}5 — **Exercice** : soit $n \in \mathbb{N}$. L'application linéaire $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto (P - P') \in \mathbb{K}_n[X]$ est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ (*ie* : $\varphi \in \text{GL}(\mathbb{K}_n[X])$).

➤ L'application φ est bien définie car si P est un polynôme de degré au plus n, alors il en est de même du polynôme $P - P'$. En outre, un calcul aisé permet d'établir que φ est linéaire, c'est à dire que : $\forall\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$. Par suite : $\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{K}_n[X])}$.

➤ L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ a pour base canonique $\mathscr{B} = \left(X^i\right)_{i \in [\![0,n]\!]}$. Il s'ensuit que : $\text{Im}\varphi = \text{Vect}\left(\left(\varphi\left(X^i\right)\right)_{i \in [\![0,n]\!]}\right)$.

Or : $\left(\varphi\left(X^i\right)\right)_{i \in [\![0,n]\!]} = \left(X^i - iX^{i-1}\right)_{i \in [\![0,n]\!]}$. La famille des polynômes $X^i - iX^{i-1}$ est libre car échelonnée, et de cardinal $(n+1)$ égal à la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et en vertu de la question de cours n^{0}8, on en déduit que φ est un isomorphisme.

➤ **Conclusion**. $\boxed{\varphi \in \text{GL}(\mathbb{K}_n[X])}$.

Complément n^{0}6 — **Tellement classique !** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls, càd une famille de polynômes non nuls tels que : $\deg(P_1) < \deg(P_2) \ldots < \deg(P_n)$. Alors la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

Autrement dit : toute famille échelonnée de polynômes non nuls est libre.

Preuve "rapide" : soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(P_1, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls tels que : $\deg(P_1) < \deg(P_2) \ldots < \deg(P_n)$. Supposons qu'il existe n scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que :

$$\underbrace{\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n}_{P} = 0$$

Si $\alpha_n \neq 0$, alors $\deg(P) = \deg(P_n)$.‖ Ceci est absurde, puisque $P = 0$.

Il s'ensuit que $\alpha_n = 0$. On a donc :

$$\underbrace{\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1}}_{P} = 0$$

En reprenant le raisonnement précédent, on obtient $\alpha_{n-1} = 0$, puis $\alpha_{n-2} = 0\ldots$ et enfin $\alpha_1 = 0$.

On peut donc conclure que la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est libre.

Conclusion. Toute famille échelonnée de polynômes non nuls est libre.

Remarques.

1/ La preuve "propre" (sans petits points) se fait grâce au même raisonnement, mais par le biais d'une récurrence sur le nombre de polynômes n de la famille.

2/ L'exercice du complément de cours 5 est une application de cette propriété.

Complément n^{0}7 — **Théorème fondamental** : dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Remarquons que ce résultat permet de définir la dimension d'un ev de dimension finie (comme le cardinal d'une quelconque de ses bases). A ce point du cours, on sait donc seulement qu'un espace vectoriel de dimension finie admet une famille génératrice finie : aucune des propriétés sur la dimension précédemment évoquées dans ces lignes ne peut être utilisée.

Le théorème repose essentiellement sur le résultat ci-dessous :

Lemme-clef : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, le cardinal d'une famille libre est majoré par n.

➤ **Preuve du lemme**. Une formulation équivalente de ce lemme est : dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal strictement plus grand que n est liée.

Pour l'établir, il suffit de prouver que dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $(n+1)$ est liée. En effet, si cette propriété est valide, alors toute famille de cardinal strictement plus grand que n contiendra une sous famille de cardinal $(n+1)$ liée, et sera donc elle-même liée.

Posons donc $\mathscr{P}(n)$ l'assertion : "dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $(n+1)$ est liée", et démontrons $\mathscr{P}(n)$ par récurrence sur n.

Initialisation $(n = 0)$. Soit E un espace vectoriel engendré par 0 vecteur… Alors $E = \{0\}$, et toute famille de cardinal 1 est liée, puisqu'une telle famille ne peut contenir que le vecteur nul. Cette brillante démonstration permet d'affirmer que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour un certain entier naturel n, et démontrons qu'elle est vraie au rang $(n+1)$.

Soit E un espace vectoriel, $\mathscr{G} = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ une famille génératrice de E, et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_{n+2})$ une famille de vecteurs de E de cardinal $(n+2)$. Il s'agit de prouver que $\mathscr{F}$ est liée.

Introduisons le sev F de E engendré par les n premiers vecteurs de $\mathscr{G}$: $F = \text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_n)$.

Soit i un entier compris entre 1 et $n+2$. Puisque $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E, il existe $(n+1)$ scalaires $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in+1}$ tels que :

$$u_i = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_{ik} v_k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} v_k \right)}_{\in F} + \alpha_{in+1} v_{n+1}$$

‖. En effet, les P_i étant de degrés deux à deux distincts, on a $\deg(\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n) = \max(\deg(\alpha_1 P_1), \ldots, \deg(\alpha_n P_n))$.

En renommant $w_i = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} v_k\right)$ et $\alpha_i = \alpha_{in+1}$, on peut conclure que :

$$\forall\, i \in [\![\, 1, n+2 \,]\!],\ \exists w_i \in\ F,\ \exists\, \alpha_i \in \mathbb{K},\ u_i = w_i + \alpha_i v_{n+1} \qquad (\spadesuit)$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

➢ Premier cas : tous les α_i sont nuls. Alors : $\forall\, i \in [\![\, 1, n+2 \,]\!],\ \exists w_i \in\ F,\ u_i = w_i$. Ainsi la famille $(w_1, \ldots, w_{n+2})$ est une famille de cardinal $(n+2)$ dans F, qui est engendré par n vecteurs. Par hypothèse de récurrence, elle est liée. [**]

➢ Second cas : les α_i ne sont pas tous nuls. Alors il existe $i \in [\![\, 1, n+2 \,]\!]$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Qui à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $\alpha_{n+2} \neq 0$.

On introduit alors la nouvelle famille de vecteurs $(U_1, \ldots, U_{n+1})$ en posant :

$$\forall\, i \in [\![\, 1, n+1 \,]\!],\ U_i = u_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}}\, u_{n+2}$$

On a :

$$\forall\, i \in [\![\, 1, n+1 \,]\!],\ U_i = w_i + \alpha_i v_{n+1} - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}}\, (w_{n+2} + \alpha_{n+2} v_{n+1})$$

D'où : $\forall\, i \in [\![\, 1, n+1 \,]\!],\ U_i = w_i - \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}}\, w_{n+2}$. En particulier : $\forall\, i \in [\![\, 1, n+1 \,]\!],\ U_i \in\ F$.

La famille $(U_1, \ldots, U_{n+1})$ est ainsi une famille de $(n+1)$ vecteurs de F. Puisque F est engendré par n vecteurs (par construction), l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que cette famille est liée. Il existe donc $(n+1)$ scalaires $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ non tous nuls tels que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i U_i = 0 \text{ d'où : } \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i \left(u_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_{n+2}}\, u_{n+2}\right) = 0 \text{ d'où : } \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_{n+2}}\right) u_{n+2} = 0$$

En posant : $\forall\, i \in [\![\, 1, n+1 \,]\!],\ \gamma_i = \beta_i$ et $\gamma_{n+2} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\beta_i \alpha_i}{\alpha_{n+2}}$,

on peut conclure qu'il existe $(n+2)$ scalaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+2}$ non tous nuls [††] tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} \gamma_i u_i = 0$. Il s'ensuit que la famille $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_{n+2})$ est liée.

➢ Dans les deux cas, la famille $\mathscr{F}$ est liée, ce qui prouve que la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, fournit l'hérédité, et achève donc la preuve du lemme.

Conclusion. Dans un espace vectoriel E engendré par n vecteurs, le cardinal d'une famille libre est majoré par n.

➤ **Preuve du théorème**. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Notons n et p les cardinaux respectifs de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Puisque $\mathscr{B}$ est une base, c'est en particulier une famille libre de E, qui est engendré par p vecteurs (puisque $\mathscr{B}'$ est génératrice). D'après le lemme, on en déduit que : $n \leqslant p$.

En permutant les rôles de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ dans le court raisonnement ci-dessus, on obtient : $p \leqslant n$.

Finalement $n = p$, ce qui permet de conclure : deux bases d'un même $\mathbb{K}$-ev de dimension finie ont même cardinal.

**. Cette affirmation s'obtient "en deux coups"; l'hypothèse de récurrence permet seulement d'affirmer que la famille $(w_1, \ldots, w_{n+1})$ est liée. A fortiori, la famille $(w_1, \ldots, w_{n+2})$, qui la contient, est liée.

††. Puisque les β_i sont non tous nuls.