MPSI – Colle 26 (22 au 26 mai 2023) : EV, applications linéaires, EV de dimension finie

Chapitre 20 : **Espaces vectoriels et applications linéaires**
+ **Chapitre 23** : **Espaces vectoriels de dimension finie**
(COURS + EXERCICES)

Chapitre 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

1 – Espaces vectoriels

2 – Sous-espaces vectoriels

3 – Combinaisons linéaires, familles génératrices

4 – Applications linéaires

5 – Noyau et image d'une application linéaire

6 – Isomorphismes et automorphismes

7 – Sommes de sev et sev supplémentaires

8 – Projecteurs

Chapitre 21 : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dorénavant, on pourra noter v au lieu de $\vec{v}$ un élément de E.

1 – Familles libres et bases d'un espace vectoriel

Définition : n vecteurs $v_1,\dots, v_n$ d'un $\mathbb{K}$-ev E sont **linéairement indépendants** si :

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i = 0_E\right] \Longrightarrow [\forall\, i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i = 0] \qquad (\text{avec } (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n)$$

Remarque : la définition fournit une méthode pour prouver que n vecteurs $v_1,\dots, v_n$ d'un $\mathbb{K}$-ev E sont linéairement indépendants. Explicitement, on suppose qu'il existe n scalaires $\lambda_1,\dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_E$, et on établit que cette égalité n'est satisfaite que lorsque tous les λ_i sont nuls.

Définitions : famille libre, famille liée.

Propriété : soient $v_1,\dots, v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. La famille $\mathscr{F}=(v_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est **liée** SSI il existe un entier $i\in[\![1,n]\!]$ tel que : $v_i \in \mathrm{Vect}\,(v_1,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n)$.

Définition : **base** d'un espace vectoriel, bases canoniques des ev “de référence”.

2 – Espaces vectoriels de dimension finie

Définition : on appelle **$\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie** un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E ayant une famille génératrice finie.

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dim finie ; $\mathbb{K}[X]$ et $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne le sont pas.

Théorème : dans un espace vectoriel (non nul) de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Définition : la dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie est le cardinal d'une quelconque de ses bases.

Notation : $\dim_{\mathbb{K}} E$, ou $\dim E$ si pas d'ambiguïté sur $\mathbb{K}$.

Théorème (“de la base extraite”) : de toute famille génératrice on peut extraire une base.

Corollaire : tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.

1/ Toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.

2/ Toute famille génératrice de E de cardinal n est une base.

Théorème (de la base incomplète) : toute famille libre de E est contenue dans une base de E.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n.

1/ Toute famille libre de E possède au plus n éléments.

2/ Toute famille libre de E de cardinal n est une base.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$-ev non nul de dimension finie n, et F un sev de E. Alors : 1/ $\dim F \leqslant n$ 2/ $\dim F = n$ SSI $F=E$

3 – Dimension d'une somme de sev

Propriété : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F et G deux sev supplémentaires dans E (*ie* $E=F\bigoplus G$). Alors : $\dim E = \dim F + \dim G$.

Théorème (existence d'un supplémentaire en dimension finie) : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F un sev de E. Il existe un sev G de E tel que : $E=F\bigoplus G$.

Théorème (des 4 dimensions ou relation de Graßmann) : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F et G deux sev de E. Alors :

$$\dim\,(F+G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F\cap G)$$

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, F et G deux sev de E. Alors $E=F\bigoplus G$ SSI $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F\cap G=\{0_E\}$.

Définition : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On appelle **hyperplan** de E un sev de E de dimension $n-1$.

Propriété : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v\notin H$. Alors : $E = H \bigoplus \mathrm{Vect}\,(v)$.

4 – Coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice de passage

Théorème : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, et soit $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E. Alors :

$$\forall\, V \in\ E,\ \exists!\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n,\ V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Définition : les scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ du théorème ci-dessus sont appelés **coordonnées du vecteur V dans la base $\mathscr{B}$**.

Changement de base et matrice de passage

Définition : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n $(n \neq 0)$, soient $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ et $\mathscr{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ deux bases de E. La **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** notée $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} = (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n}$ tque : $\forall\, j \in [\![\, 1, n\,]\!]$, $\quad w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i$

Traduction : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}$ est la matrice obtenue en mettant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ (attention à l'ordre !).

Propriété (effet d'un changement de base sur les coordonnées) : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n $(n \neq 0)$, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Pour tout vecteur V de E, notons $X_{\mathscr{B}}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ les n-uplets de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. On a : $X_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}$.

Propriété : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n $(n \neq 0)$, soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E. On a : $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}''} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}''}$.

Corollaire : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n $(n \neq 0)$, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $[\mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}]^{-1} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}'\mathscr{B}}$.

Pour enfoncer le clou : **toute matrice de passage est inversible**.

5 – Classification des ev de dimension finie

Théorème (classification des ev de dimension finie) : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Traduction : à isomorphisme près, $\mathbb{K}^n$ est le seul $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Questions de cours

- **Propriété** : soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. La famille $\mathscr{F} = (v_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est **liée** SSI il existe un entier $i \in [\![\, 1, n\,]\!]$ tel que : $v_i \in \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n)$.

- **Corollaire (du théorème de la base extraite)** : soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie n, et F un sev de E. Alors : 1) $\dim F \leqslant n$; 2) $\dim F = n$ SSI $F = E$

- **Propriété** : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, H un hyperplan de E et v un vecteur de E tel que $v \notin H$. Alors : $E = H \bigoplus \mathrm{Vect}\,(v)$.

- **Propriété (effet d'un changement de base sur les coordonnées)** : soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n $(n \neq 0)$, soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Pour tout vecteur $\overrightarrow{V}$ de E, notons $X_{\mathscr{B}}$ et $X_{\mathscr{B}'}$ les n-uplets de ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. On a : $X_{\mathscr{B}} = \mathrm{P}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'} X_{\mathscr{B}'}$.

- **Exercice** : soient $E = \mathbb{R}_2[X]$, et $\mathscr{B}' = \big(X^2 - 1, X + 1, X\big)$.

  1) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E. 2) A l'aide d'une matrice de passage, déterminer les coordonnées de $P = aX^2 + bX + c$ dans la base $\mathscr{B}'$.

Les questions suivantes sont sur le principe du volontariat

- **Théorème (existence d'un supplémentaire en dimension finie)** : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F un sev de E. Il existe un sev G de E tel que : $E = F \bigoplus G$.

- **Théorème (des 4 dimensions ou relation de Graßmann)** : soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et F et G deux sev de E. Alors : $\dim\,(F + G) = \dim F + \dim G - \dim\,(F \cap G)$

- **Propriété** : soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, avec E de dimension $n \geqslant 1$; $\mathscr{B} = (\overrightarrow{v_i})_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E ; et $f \in \mathscr{L}\,(E, F)$.

  Enfin on note $\mathscr{F} = (f\,(\overrightarrow{v_i}))_{i \in [\![1,n]\!]}$. Alors :

  1) $[f$ est injective$] \Longleftrightarrow [\mathscr{F}$ est libre$]$

  2) $[f$ est surjective$] \Longleftrightarrow [\mathscr{F}$ est génératrice de $F]$

  3) $[f$ est un isomorphisme$] \Longleftrightarrow [\mathscr{F}$ est une base de $F]$

- **Théorème (classification des ev de dimension finie)** : tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.