Chapitre 24 — "L'essentiel" sur les fonctions convexes

Préambule. Ce chapitre est un complément d'Analyse portant sur une classe particulière de fonctions à valeurs réelles.

Table des matières

Tout au long de ce chapitre, I désignera un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

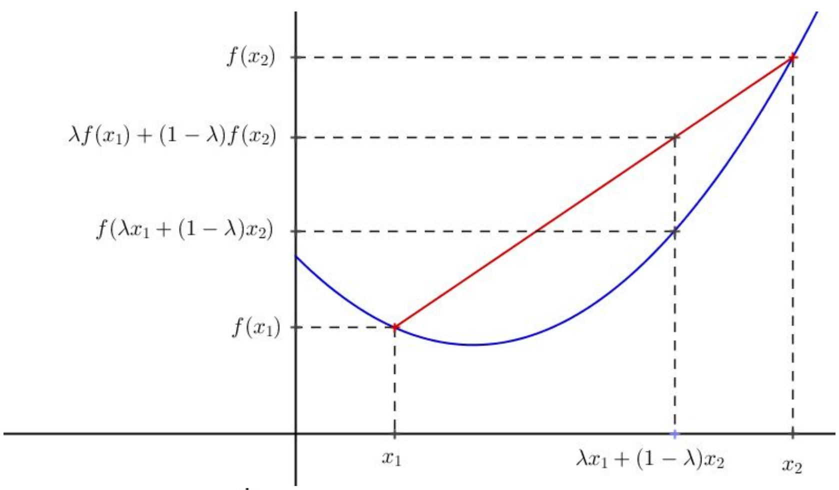
1. Généralités sur les fonctions convexes

Définition 1 - Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est **convexe sur** I si :

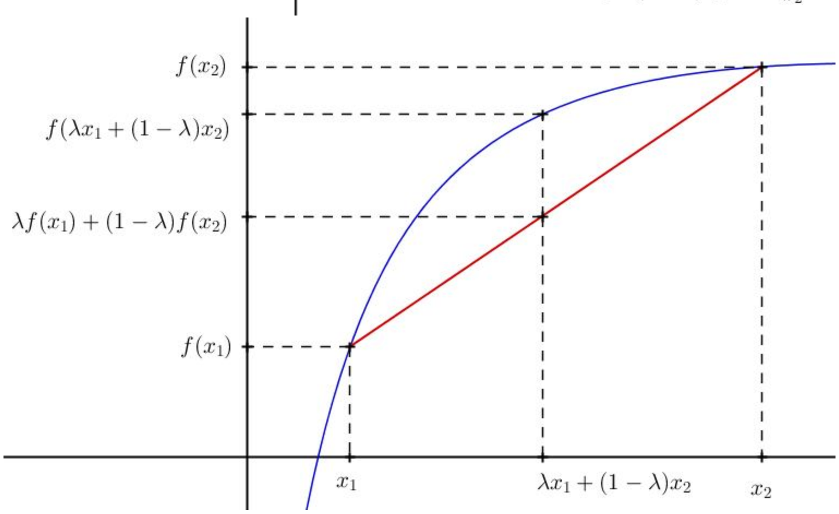
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Et la fonction f est **concave sur** I si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$



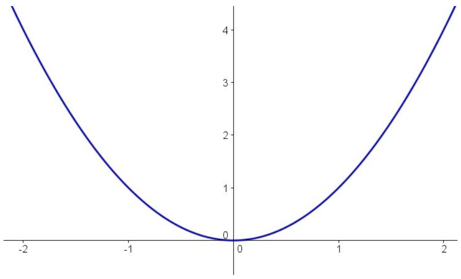
Graphiquement, une fonction **CONVEXE** est une fonction dont la courbe est située **en-dessous de toutes ses cordes.**



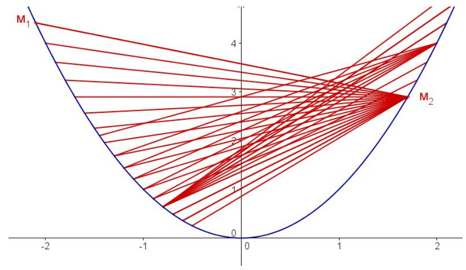
Graphiquement, une fonction **CONCAVE** est une fonction dont la courbe est située **au-dessus de toutes ses cordes.**

Exemples de fonctions convexes, exemples de fonctions concaves

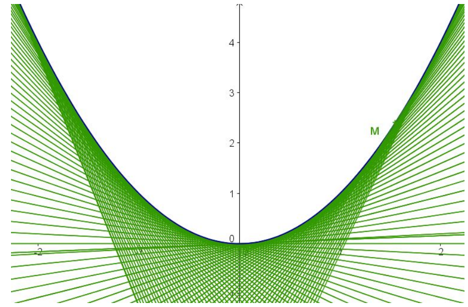
❀ La fonction $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$



Courbe $\mathscr{C}_f$

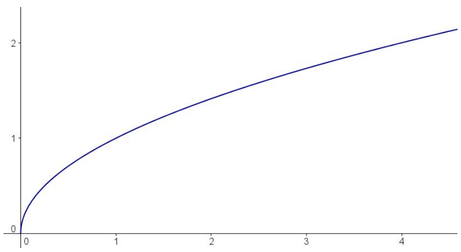


$\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses cordes

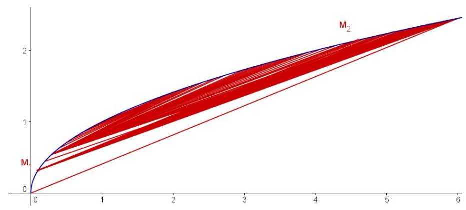


$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes

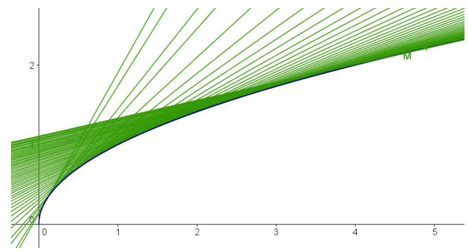
❀ La fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$



Courbe $\mathscr{C}_f$

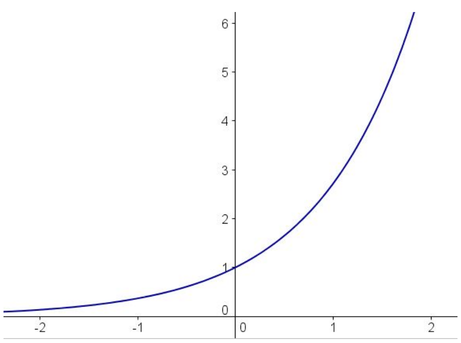


$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses cordes

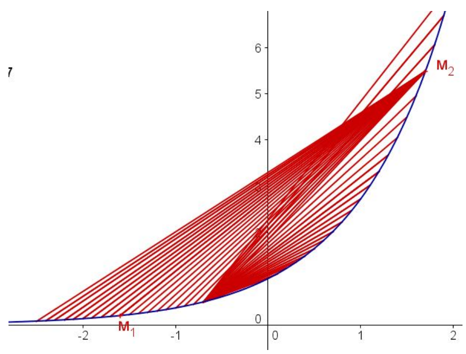


$\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes

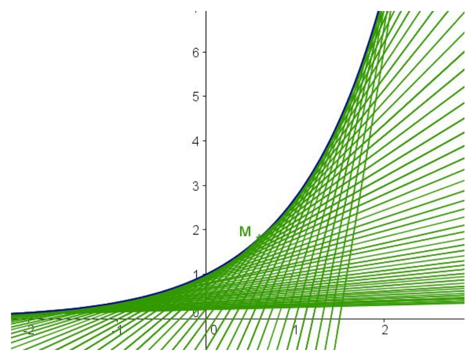
❀ La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$



Courbe $\mathscr{C}_f$

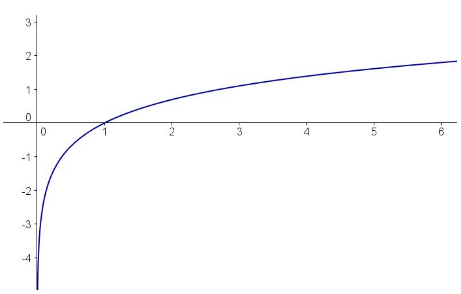


$\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses cordes

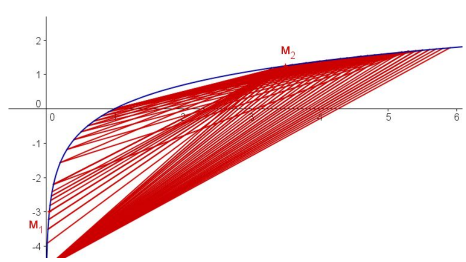


$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes

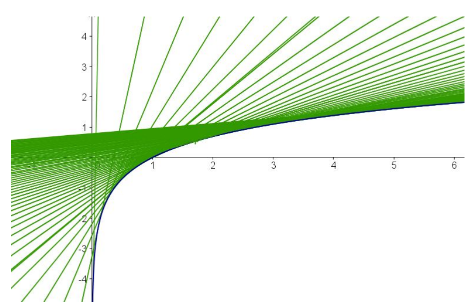
❀ La fonction $f : x \longmapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$



Courbe $\mathscr{C}_f$



$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses cordes



$\mathscr{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes

2. Propriétés des fonctions convexes

Propriété 1 - Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est convexe sur I SSI :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n,\ \forall (t_1,\dots,t_n) \in [0,1]^n,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1,$$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Application 1 — L'inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels positifs $x_1,\dots,x_n$ on a :

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

Application 2 — L'inégalité de Hölder

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_n$ $(2n)$ nombres réels positifs.

Soient encore p et q deux réels > 1 tels que : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

La propriété ci-dessous traduit le fait que si une fonction est convexe (et dérivable), alors la "pente de ses tangentes est croissante", et réciproquement. Ce résultat dont l'interprétation graphique est claire (voir exemples de graphes de fonctions convexes précédents) est le premier énoncé reliant la convexité aux variations de la dérivée ; ce lien sera précisé lors du paragraphe suivant.

Propriété 2 - Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est convexe sur I SSI :

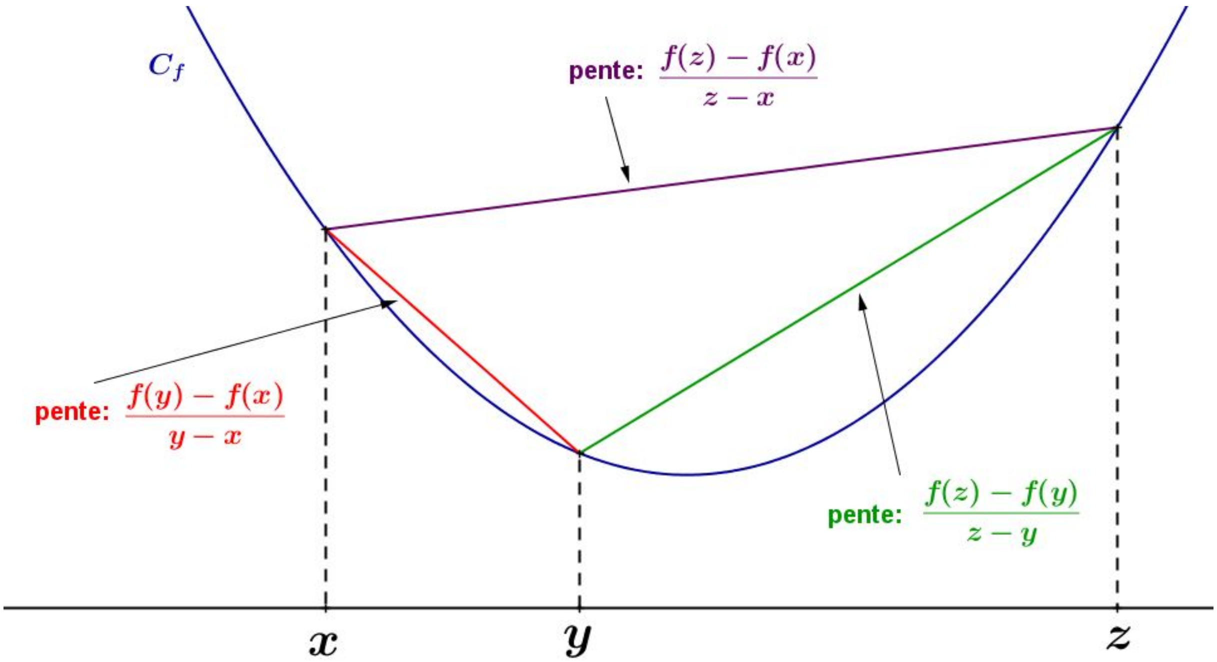
pour tout réel x dans I, l'application $\begin{array}{rcl}\phi_x : I\setminus\{x\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\end{array}$ est croissante

La première application de cette propriété est l'énoncé ci-dessous.

COROLLAIRE 1 - (Inégalité des trois pentes).

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et trois réels x, y, z de I tels que : $x < y < z$. Si la fonction f est convexe sur I alors :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$



3. Convexité et dérivée

Dans ce paragraphe, on caractérise les fonctions convexes parmi celles de classe $\mathscr{C}^2$. Les deux énoncés de cette section sont très utiles pour établir pratiquement qu'une fonction deux fois continûment dérivable est convexe (et pour pouvoir lui appliquer les résultats du paragraphe précédent).

THÉORÈME 1 - Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est dérivable sur I.

Alors :

$$[f \text{ convexe sur } I] \iff [f' \text{ croissante sur } I]$$

Remarque. Evidemment, sous les hypothèses du théorème, on a également :

$$[f \text{ concave sur } I] \iff [f' \text{ décroissante sur } I]$$

Conséquence. Pour f de classe $\mathscr{C}^2$ sur I, on a :

$$[f \text{ convexe et concave sur } I] \iff [f \text{ affine}]$$

COROLLAIRE 2 - Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.

Alors :

$$[f \text{ convexe sur } I] \iff [f'' \text{ positive sur } I]$$

Remarque. Evidemment, sous les hypothèses du corollaire, on a également :

$$[f \text{ concave sur } I] \iff [f'' \text{ négative sur } I]$$

Applications

- La fonction exponentielle, la fonction $x \longmapsto x^{2n}$ et la fonction ch sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction logarithme népérien, la fonction racine carrée, et la fonction arctangente sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction cos est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, convexe sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$, convexe sur $[\pi, 2\pi]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^{1/n}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.