Chapitre 25 — "L'essentiel" sur l'intégrale sur un segment

Préambule. Ce chapitre est consacré à la construction de l'intégrale, et à la présentation de nouvelles formules relatives aux intégrales en fin de chapitre, préparant le terrain pour la notion de série numérique.

Table des matières

1. Continuité uniforme

Définition 1 - Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. f est **uniformément continue** sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall\,(x,y) \in I^2,\ |y-x| < \alpha \Longrightarrow |f(y)-f(x)| < \varepsilon$$

Exemple : la fonction carrée $x \in [0,1] \longmapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0,1]$.

Contre-exemple : la fonction carrée $x \in [0,+\infty[\longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $[0,+\infty[$.

Propriété 1 - Si f est lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.

Propriété 2 - Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.

Le point clef de ce paragraphe est que la réciproque de la propriété précédente est vraie, sous réserve que l'on se restreigne à un segment.

Théorème 1 - Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$[f$ est uniformément continue sur $[a,b]]$ SSI $[f$ est continue sur $[a,b]]$

2. Subdivisions

Définition 2 - Une **subdivision** $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ du segment $[a,b]$ est la donnée de $n+1$ réels $x_0, \dots, x_n$ tels que : $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$.

On appelle **pas** de la subdivision σ le réel : $p = \max\limits_{i \in [\![0,n]\!]} (x_{i+1} - x_i)$.

Une subdivision est dite **régulière** (ou **à pas constant**) lorsque : $\forall\, i \in [\![\, 0, n\,]\!],\ x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$

Remarque. Les subdivisions régulières vous sont particulièrement familières, puisque ce sont celles que l'on utilise dans la méthode d'Euler, ainsi que dans les méthodes numériques de calcul intégral.

Définition 3 - Le **support** de la subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ est l'ensemble noté $\mathrm{Supp}\,(\sigma) = \{x_0, \dots, x_n\}$.

Une subdivision σ' de $[a,b]$ est **plus fine** que σ si $\mathrm{Supp}\,(\sigma) \subset \mathrm{Supp}\,(\sigma')$.

Illustration. Dans l'exemple ci-dessous, la subdivision $\sigma' = (y_0, \dots, y_m)$ est plus fine que $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$.

Définition 4 - Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$. La **réunion** des subdivisions σ et σ', notée $\sigma \vee \sigma'$ est la subdivision de $[a,b]$ dont le support est $\mathrm{Supp}\,(\sigma) \cup \mathrm{Supp}\,(\sigma')$.

Lemme 1 - Avec les notations introduites plus haut, $\sigma \vee \sigma'$ est plus fine que σ et σ'.

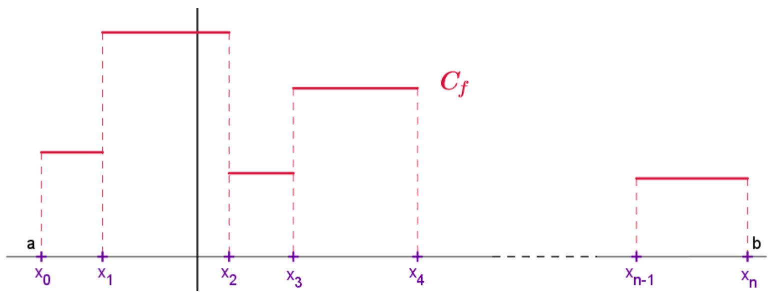
3. Fonctions en escalier

Définition 5 - Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une **fonction en escalier** (sur $[a, b]$) s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ et n réels $y_0, \ldots, y_{n-1}$ tels que :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \ \forall x \in \ ]x_i, x_{i+1}[\ , \ f(x) = y_i$$

Dans cette situation, on dit que σ est **adaptée** à la fonction f.
Informellement, une fonction en escalier est une fonction "constante par morceaux".

Illustration. Ci-dessous, un exemple de courbe représentative d'une fonction en escalier.



Exemples. Une fonction constante sur un segment est un cas particulier de fonction en escalier. La restriction de la fonction de Heaviside à un segment est une fonction en escalier. Enfin, la restriction de la fonction partie entière à un segment est un autre exemple de fonction en escalier.

Remarque. Observons que si σ est une subdivision adaptée à la fonction f, alors toute subdivision plus fine que σ l'est aussi.

Notation. Par la suite, nous noterons $\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Propriété 3 - En notant $\bullet$ la multiplication par un scalaire : $(\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \bullet)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et $(\mathscr{E}([a, b], \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif (non intègre).

4. Fonctions continues par morceaux

La notion de fonction continue par morceaux généralise celle de fonction continue.

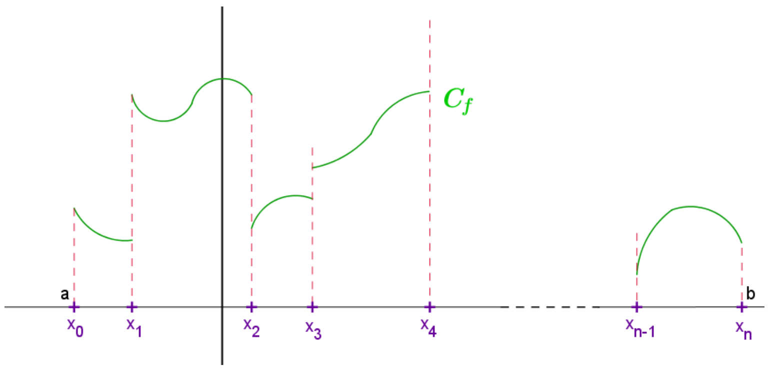
Définition 6 - Une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que :

1/ $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \ f_{|]x_i, x_{i+1}[} \in \mathscr{C}^0(]x_i, x_{i+1}[, \mathbb{R})$

2/ pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$, les limites de f à gauche et à droite de x_i existent et sont finies ; la limite de f à droite (*resp.* à gauche) de $x_0 = a$ (*resp.* de $x_n = b$) existe et est finie.

Dans cette situation, on dit encore que σ est **adaptée** à la fonction f.

Illustration. Ci-dessous, un exemple de courbe représentation d'une fonction continue par morceaux.



Remarque. Observons que comme dans le cas des fonctions en escalier, si σ est une subdivision adaptée à la fonction f, alors toute subdivision plus fine que σ l'est aussi.

Notation. Par la suite, nous noterons $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Puisqu'il est clair que toute fonction continue (*resp.* en escalier) sur $[a,b]$ est en particulier continue par morceaux sur $[a,b]$, on a les inclusions :

$$\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$$

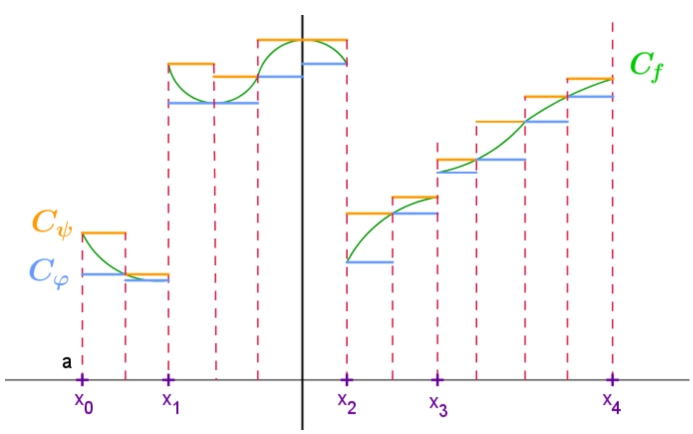
PROPRIÉTÉ 4 - Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est bornée $[a,b]$.

PROPRIÉTÉ 5 - En notant $\bullet$ la multiplication par un scalaire : $\left(\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R}),+,\bullet\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et $\left(\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau commutatif (non intègre).

L'énoncé ci-dessous joue un rôle fondamental dans la construction de l'intégrale d'une fonction continue (par morceaux ou non) sur un segment, qui constitue l'objet du paragraphe suivant.

THÉORÈME 2 - Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ "peut être approchée arbitrairement près et de manière uniforme par une fonction en escalier" dans le sens plus précis suivant :

$$\forall f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists (\varphi,\psi) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^2,$$
$$\forall x \in [a,b],\ [\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)] \wedge [0 \leqslant \psi(x) - \varphi(x) < \varepsilon]$$



5. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

5.1. Intégrale d'une fonction en escalier.

Définition 7 - Soit $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, et soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f. On appelle **intégrale de f sur $[a,b]$ relativement à σ** le réel : $I_{[a,b],\sigma}(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} y_i\,(x_{i+1} - x_i)$ où les y_i désignent les valeurs de la fonction f sur chacun des intervalles $]\,x_i, x_{i+1}\,[$.

Remarque. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Dans le cas particulier où σ est une subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$. On note φ la fonction en escalier égale à $f(x_i)$ sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$. On retrouve alors la formule $I_{[a,b],\sigma}(\varphi) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)$ intervenant dans la méthode des rectangles (à gauche) pour le calcul d'une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f$.

Propriété 6 - Mêmes notations que dans la définition précédente. La valeur du réel $I_{[a,b],\sigma}(f)$ est indépendante de la subdivision σ adaptée à f. En d'autres termes, si σ et σ' sont deux subdivisions de $[a,b]$ adaptées à f, alors : $I_{[a,b],\sigma}(f) = I_{[a,b],\sigma'}(f)$.

Définition 8 - Mêmes notations que dans la définition et la propriété précédentes. La valeur commune à toutes les $I_{[a,b],\sigma}(f)$ est appelée **intégrale de la fonction en escalier f sur l'intervalle** $[a,b]$. On la note : $I_{[a,b]}(f)$.

5.2. Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

Propriété 7 - (Positivité). $\forall\, f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),\ [f \geqslant 0] \Longrightarrow \left[I_{[a,b]}(f) \geqslant 0\right]$

Propriété 8 - (Croissance). $\forall\,(f,g) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^2,$

$$[g \geqslant f] \Longrightarrow \left[I_{[a,b]}(g)\right] \geqslant \left[I_{[a,b]}(f)\right]$$

Propriété 9 - (Linéarité). L'application $f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}) \longmapsto I_{[a,b]}(f)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$.

Propriété 10 - (Relation de Chasles). $\forall\, c \in\,]\,a,b\,[\,,\ \forall\, f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),$

$$I_{[a,b]}(f) = I_{[a,c]}(f) + I_{[c,b]}(f)$$

5.3. Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

En avant pour quelques notations. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, on introduit les ensembles :

$\mathscr{E}^+(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),\ \varphi \geqslant f\}$ et $\mathscr{E}_-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R}),\ \varphi \leqslant f\}$

des fonctions en escalier sur $[a,b]$ respectivement minorées et majorées par f. On introduit également les ensembles des valeurs des intégrales correspondantes :

$\mathscr{I}^+(f) = \left\{I_{[a,b]}(\varphi),\ \varphi \in \mathscr{E}^+(f)\right\}$ et $\mathscr{I}_-(f) = \left\{I_{[a,b]}(\varphi),\ \varphi \in \mathscr{E}_-(f)\right\}$

Théorème 3 - Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathscr{I}^+(f)$ admet une borne inférieure, l'ensemble $\mathscr{I}_-(f)$ admet une borne supérieure, et :

$$\inf \mathscr{I}^+(f) = \sup \mathscr{I}_-(f)$$

Définition 9 - Soit $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$. On appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f = \inf \mathscr{I}^+(f) \quad (= \sup \mathscr{I}_-(f))$$

Remarque. Pour les fonctions en escalier, cette définition coïncide (ouf!) avec celle d'intégrale donnée dans le paragraphe ad hoc.

Explicitement : $\forall f \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})$, $I_{[a,b]}(f) = \displaystyle\int_a^b f$.

5.4. Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux.

Les preuves des énoncés ci-dessous s'obtiennent par passage à la limite à partir des propriétés analogues pour les intégrales des fonctions en escalier. En clair, on utilise conjointement les propriétés du paragraphe b et le théorème précédent.

Propriété 11 - (Positivité). $\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, $[f \geqslant 0] \Longrightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0\right]$

Propriété 12 - (Croissance). $\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})^2$, $\quad [g \geqslant f] \Longrightarrow \left[\displaystyle\int_a^b g \geqslant \int_a^b f\right]$

Propriété 13 - (Linéarité). L'application $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R}), \longmapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire sur $\mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$.

Propriété 14 - (relation de Chasles). $\forall c \in \,]a,b[$, $\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Les deux énoncés ci-dessous sont des conséquences de la positivité de l'intégrale.

Propriété 15 - (Majoration). $\forall f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

Théorème 4 - (Inégalité de Cauchy-Schwartz).

$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})^2, \qquad \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$$

6. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue

Propriété 16 - Si f est une fonction <u>continue</u> et positive sur $[a,b]$, alors :

$$\left[\int_a^b f = 0\right] \Longleftrightarrow [f=0]$$

Définition 10 - Pour toute $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, on appelle **valeur moyenne** de f sur $[a,b]$ le réel : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$.

On obtient comme conséquence du théorème des bornes atteintes et du théorème des valeurs intermédiaires l'énoncé suivant.

Propriété 17 - (formule de la moyenne). Si f est une fonction <u>continue</u> sur $[a,b]$, alors :

$$\exists\, c \in [a,b],\ f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

La fin de ce paragraphe est consacrée aux méthodes numériques de calcul intégral.

Définition 11 - Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, et pour tout entier n non nul, on appelle (n-ième) **somme de Riemann** de f sur $[a,b]$ le réel : $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

Il résulte de la construction de l'intégrale que la suite des sommes de Riemann d'une fonction continue converge vers $\displaystyle\int_a^b f$; en d'autres termes, la méthode des rectangles (à gauche) converge. En outre, dans le cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on dispose d'un énoncé plus fin donnant une majoration de la distance entre la n-ième somme de Riemann et l'intégrale de f sur $[a,b]$, que voici :

Théorème 5 - Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ on a :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - S_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} M_1 \quad \text{avec} \quad M_1 = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Théorème 6 - (fondamental de l'intégration). Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$. La fonction $F : x \in I \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I s'annulant en a.

Corollaire 1 - Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit G une primitive de f sur I. Alors : $\forall\,(a,b) \in I^2,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [G(t)]_a^b$.

7. Formule de Taylor avec reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 7 - Formule de Taylor avec reste intégrale. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, alors :

$$f\left(b\right) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(b-a\right)^{k}\right] + \frac{1}{n!}\int_{a}^{b}\left(b-t\right)^{n} f^{(n+1)}\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

L'énoncé ci-dessous est une conséquence immédiate de l'énoncé précédent.

Corollaire 2 - Inégalité de Taylor-Lagrange. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, alors :

$$\left|f\left(b\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(b-a\right)^{k}}{k!} f^{(k)}\left(a\right)\right| \leqslant \frac{\left(b-a\right)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \text{ où : } M_{n+1} = \sup_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}\left(x\right)\right|$$

<u>Conséquences de l'inégalité de Taylor-Lagrange</u>.

➤ **Application 1**. La série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ converge et a pour somme e. En raccourci : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

➤ **Application 2**. Plus généralement : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

➤ **Application 3**. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\left(-1\right)^n}{n+1} = \ln 2$