Exercices 24 — Fonctions convexes

Exercice 1 — Justifier les affirmations suivantes, énoncées dans les notes relatives au chapitre 24.

1/ La fonction exponentielle, la fonction $x \longmapsto x^{2n}$ et la fonction ch sont convexes sur $\mathbb{R}$.

2/ La fonction logarithme népérien, la fonction racine carrée, et la fonction arctangente sont concaves sur $\mathbb{R}_+^*$.

3/ La fonction cos est concave sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, convexe sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

4/ La fonction sin est concave sur $[0, \pi]$, convexe sur $[\pi, 2\pi]$.

5/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^{1/n}$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 — Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$

Exercice 3 — Etablir que pour tout réel $x > -1$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$

Exercice 4 — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $\dfrac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin x \leqslant x$

Exercice 5 — Etablir que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a : $\dfrac{4}{\pi}\, x \leqslant \arctan x \leqslant x$

Exercice 6 — **Inégalité arithmético-géométrique**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir que pour tous réels positifs $x_1, \ldots, x_n$ on a :

$$(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Exercice 7 — **Inégalité de Hölder**

Soit p et q deux réels > 1 tels que : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1/ Etablir que pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, on a :

$$xy \leqslant \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, x^q$$

2/ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ $(2n)$ nombres réels strictement positifs.

On pose : $A = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$, $a_i = \dfrac{x_i}{A}$ et $b_i = \dfrac{y_i}{B}$.

Etablir que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$.

3/ En déduire l'inégalité de Holder : sous les mêmes hypothèses que précédemment, on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

Exercice 8 — Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ $(2n)$ nombres réels positifs.

Etablir que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Exercice 9 — Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Etablir que :

$$[f \text{ est convexe et concave}] \Longleftrightarrow [f \text{ est affine}]$$

Exercice 10 — Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction continue et strictement croissante. Etablir que f est convexe si et seulement si sa bijection réciproque f^{-1} est concave.

Exercice 11 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1/ Justifier brièvement que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

2/ Etablir que f est deux fois dérivable en 0 et que $f''(0) = \dfrac{1}{6}$.

3/ Etablir que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Indications et éléments de correction

Exercice 1 — Selon les théorèmes généraux, les fonctions (usuelles) de cet exercice sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur les intervalles concernés. En particulier, il s'agit de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$, et on pourra donc appliquer à répétition la propriété faisant le lien entre la convexité de f et le signe de f''.

Exercices 2 à 5 — Le graphe d'une fonction convexe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, et en-dessous de chacune de ses cordes.

Le graphe d'une fonction concave est situé en-dessous de chacune de ses tangentes, et au-dessus de chacune de ses cordes.

Exercice 6 — Après l'avoir brièvement justifiée, utiliser la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 7 — 1/ Utiliser la convexité de la fonction exponentielle. 2/ Utiliser la question 1 et sommer... 3/ RAS.

Exercice 8 — Ecrire l'inégalité de Hölder pour $p = q = 2$.

Exercice 9 — Utiliser le lien entre convexité et signe de la dérivée seconde.

Exercice 10 — Montrer l'implication f convexe $\Longrightarrow f^{-1}$ concave, en utilisant la définition de convexité. La réciproque s'en déduit immédiatement.

Exercice 11 — 1/ RAS. 2/ Montrer que f est dérivable en 0, puis que f' est dérivable en 0. Pour les différentes limites que l'on est conduits à calculer, on peut utiliser des DL.