Exercices 25 — Intégrale sur un segment

Exercices théoriques

Exercice 1. — Montrer que si f est une fonction lipschitzienne sur un intervalle I, alors f est uniformément continue sur I.

Exercice 2. — Montrer que si f est une fonction uniformément continue sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

Exercice 3. — Soit $[a, b]$ un segment. Montrer que la relation binaire "être plus fine que" est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exercice 4. — Soient σ et σ' deux subdivisions $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$. Justifier que la réunion $\sigma \vee \sigma'$ est plus fine que σ et que σ'.

Exercice 5. — Soit $[a, b]$ un segment. Montrer que la somme de deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$.

Exercice 6. — Soit $[a, b]$ un segment. Montrer que toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée $[a, b]$.

Exercice 7. — Soit $[a, b]$ un segment. Montrer que la somme de deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Exercice 8. — Soit $[a, b]$ un segment, et soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$. On note $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fonction f.

1) Soit α un réel de $[a, b]$, distinct de tous les x_i. On note σ' la subdivision de $[a, b]$ de support $\{x_0, \ldots, x_n, \alpha\}$. Montrer que : $I_{[a,b],\sigma}(f) = I_{[a,b],\sigma'}(f)$.

2) Déduire de la question précédente que la valeur de $I_{[a,b],\sigma}(f)$ est indépendante de la subdivision σ adaptée à f.

Exercices classiques

Exercice 9. — **A connaître !** Etablir que si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, alors :

$$\left[\int_a^b f = 0\right] \Longleftrightarrow [f = 0]$$

Exercice 10. — **A connaître (bis) ! Inégalité de Cauchy-Schwartz.** Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$. Pour tout réel t, on pose : $P(t) = \displaystyle\int_a^b (f + tg)^2$.

1) Etudier le signe du polynôme P sur $\mathbb{R}$.

2) Etablir que : $\displaystyle\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$

Exercice 11. — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}\, \mathrm{e}^{|x|}}{(n+1)!}$$

En déduire :

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Exercice 12. — Montrer que :

$$\exists\, R : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R},\ \exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in [-1;1],\ \tan x = x + R(x) \quad \text{et} \quad |R(x)| \leqslant M\, |x|^3$$

En déduire la limite lorsque a tend vers 0 de $\displaystyle \frac{1}{a} \int_0^{\pi} \tan(a \sin x)\ \mathrm{d}x$

Exercice 13. — On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1) Justifier brièvement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0;1]$.

2) Rappeler l'expression de la dérivée n-ième de f (avec $n \in \mathbb{N}$).

3) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f entre 0 et 1, établir que :

$$\lim_{n \to \infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] = \ln 2$$

Exercice 14. — En reconnaissant des sommes de Riemann, calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle \ell_1 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^3}$

2) $\displaystyle \ell_2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^4}$

3) $\displaystyle \ell_3 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^7}{n^8}$

4) $\displaystyle \ell_4 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$

5) $\displaystyle \ell_5 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2}$

6) $\displaystyle \ell_6 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

Exercice 15. — Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$ puis de $\displaystyle v_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.