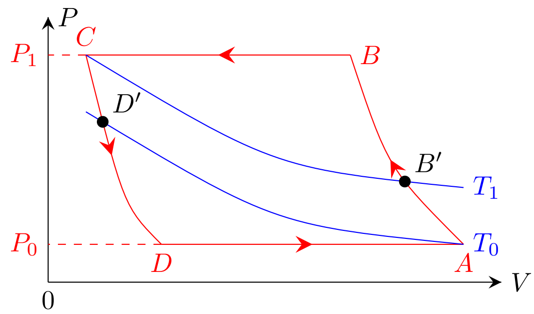
CB2 du 03/06 : Physique-chimie (Durée : 4h)

Solution de l'exercice 1 : Étude d'une pompe à chaleur

Q.1 Représentation du cycle dans le diagramme de Watt (P, V) :



$\underline{AB :}$ compression adiabatique réversible GP

$\underline{BC :}$ refroidissement isobare à P_1 du GP

$\underline{CD :}$ détente adiabatique réversible GP

$\underline{BC :}$ échauffement isobare à P_0 du GP

Cycle parcouru dans le sens **trigo**$\Longrightarrow$ **récepteur** $(W > 0)$

En bleu, les isothermes T_0 et T_1 passant par A et C

Q.2 **Données :** T_0, T_1, $a = \dfrac{P_1}{P_0}$

On utilise la loi de Laplace $PV^\gamma = C^{te}$ ou ici $\boxed{P^{1-\gamma}T^\gamma = C^{te}}$ sur les évolutions **isentropiques** du **gaz parfait** à coeff de Laplace γ constant :

- **Évolution** AB **:** $P_A^{1-\gamma}T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma}T_B^\gamma \Longleftrightarrow T_B = T_A\left(\dfrac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_A\left(\dfrac{P_A}{P_B}\right)^{-\beta} = T_A\left(\dfrac{P_0}{P_1}\right)^{-\beta}$

  puisque $\beta = 1 - \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}$, d'où $\boxed{T_B = T_0 a^\beta}$ $\underline{\text{AN} : T_B = 448\,\text{K}}$

- de même sur **l'évolution** CD **:** $T_D = T_C\left(\dfrac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1\left(\dfrac{P_C}{P_D}\right)^{-\beta} = T_1\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)^{-\beta}$

  d'où $\boxed{T_D = T_1 a^{-\beta}}$ $\underline{\text{AN} : T_D = 188\,\text{K}}$

Q.3 Une pompe à chaleur reçoit un travail Total W $(W > 0)$ pour transférer un transfert thermique de la source froide à la source chaude tel que : $\boxed{Q_F > 0 \text{ et } Q_C < 0}$

Le but de la PAC étant de réchauffer la source chaude, on en déduit son efficacité : $\boxed{e = \dfrac{-Q_C}{W}}$

Pour n moles de gaz parfait effectuant un cycle, on écrit les deux principes de la thermodynamique :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_C + Q_F = 0 \quad (U \text{ est une fonction d'état}) \Longleftrightarrow \boxed{Q_C + Q_F = -W} \tag{1}$$

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 \quad \text{mène à l'inégalité de Clausius :} \quad \boxed{\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} \leqslant 0} \tag{2}$$

On réécrit alors l'efficacité de la PAC compte tenu de (1) :

$$e = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}} \quad \text{avec ici :} \quad \left| \begin{array}{l} Q_F = Q_{DA} \text{ au contact de la source froide} \\ Q_C = Q_{BC} \text{ au contact de la source chaude} \end{array} \right.$$

Sur les isobares BC et DA du GP, on peut évaluer les transferts thermique à l'aide du premier principe :

$$\left| \begin{array}{l} Q_C = Q_{BC} = \Delta H_{BC} \\ Q_F = Q_{DA} = \Delta H_{DA} \end{array} \right. \quad \text{et selon la 2}^{\text{e}}\text{loi de Joule on a alors :} \quad \left| \begin{array}{l} Q_{BC} = C_P(T_C - T_B) \\ Q_{DA} = C_P(T_A - T_D) \end{array} \right. \quad \text{où } C_P = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1}$$

D'où : $e = \dfrac{1}{1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B}}$ avec $\dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \dfrac{T_0 - T_A a^{-\beta}}{T_1 - T_0 a^\beta} = -a^{-\beta}\dfrac{T_1 - T_0 a^\beta}{T_1 - T_0 a^\beta} = -a^{-\beta}$

$$\boxed{e = \frac{1}{1 - a^{-\beta}}} \qquad \underline{\text{AN} : e \simeq 2{,}71}$$

Q.4 Le cycle de Carnot est un cycle ditherme **réversible** constitué de 2 isentropiques et de 2 isothermes réversibles. Sur le cycle précédent, il suffit de remplacer le pt B par B' et D par D' et on aura le cycle réversible $AB'CD'$ qui est un cycle de CARNOT.

Q.5 On applique le second principe sur le cycle $AB'CD'$: $\left|\begin{array}{l}\Delta S_{\text{cycle}} = 0 \\ \Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}\end{array}\right.$ avec ici : $\boxed{S_{\text{éch}} = \dfrac{Q_{B'C}}{T_1} + \dfrac{Q_{D'A}}{T_0}}$

$$S_{\text{cr}} = -S_{\text{éch}} = -\left(\frac{Q_{B'C}}{T_1} + \frac{Q_{D'A}}{T_0}\right)$$

On applique le premier principe sur les 2 isothermes du GP vérifiant la première loi de Joule :

$$\Delta U_{B'C} = W_{B'C} + Q_{B'C} = 0 \Longrightarrow Q_{B'C} = -W_{B'C} = +\int_{V_{B'}}^{V_C} P_{\text{ext}} \mathrm{d}V \overset{QS}{=} \int_{V_{B'}}^{V_C} P\mathrm{d}V = nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_{B'}}\right)$$

$$\Delta U_{D'A} = W_{D'A} + Q_{D'A} = 0 \Longrightarrow Q_{D'A} = -W_{D'A} = +\int_{V_{D'}}^{V_A} P_{\text{ext}} \mathrm{d}V \overset{QS}{=} \int_{V_{D'}}^{V_A} P\mathrm{d}V = nRT_0 \ln\left(\frac{V_A}{V_{D'}}\right)$$

D'où la quantité d'entropie créée sur le cycle de Carnot : $S_{\text{cr}} = nR\ln\left(\dfrac{V_{B'}}{V_C}\right) + nR\ln\left(\dfrac{V_{D'}}{V_A}\right) = nR\ln\left(\dfrac{V_{B'}V_{D'}}{V_C V_A}\right)$

En appliquant la loi de Laplace : $TV^{\gamma-1} = C^{te}$ sur les isentropiques AB' et CD' :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_{B'} V_{B'}^{\gamma-1} \Longleftrightarrow T_0 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_{B'}^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{V_{B'}}{V_A} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \text{ de même } \boxed{\frac{V_{D'}}{V_C} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{V_{B'}V_{D'}}{V_C V_A} = 1 \Longrightarrow \boxed{S_{\text{cr}} = 0} \text{ le cycle de Carnot est bien réversible}$$

Q.6 Le cycle de Carnot réversible vérifie l'égalité de Clausius : $\dfrac{Q_C}{T_C} + \dfrac{Q_F}{T_F} = 0$ soit $\dfrac{Q_{B'C}}{T_1} + \dfrac{Q_{D'A}}{T_0} \Longleftrightarrow \dfrac{Q_{D'A}}{Q_{B'C}} = -\dfrac{T_0}{T_1}$

que l'on remplace dans l'expression de l'efficacité : $\boxed{e_C = \dfrac{1}{1 - \frac{T_0}{T_1}}}$ <u>AN : $e_C \simeq 19{,}9$</u>

Q.7 En notant Δt la durée d'un cycle, on introduit les **puissances thermiques** moyennes échangées avec les deux thermostats :

$\left|\begin{array}{l}P_C = \dfrac{Q_C}{\Delta t} \\ P_F = \dfrac{Q_F}{\Delta t}\end{array}\right.$ ce qui permet de réécrire l'efficacité $e = \dfrac{-Q_C}{W} \Longrightarrow \boxed{e = \dfrac{-P_C}{P_m}}$ avec P_m la puissance mécanique

Reste à évaluer P_C qui correspond **exactement à P_{fuite}**, l'apport d'énergie thermique compense exactement les fuites thermiques pour que la **température reste constante** (régime stationnaire) :

$$\boxed{P_C = -P_{\text{fuite}}} \Longrightarrow \boxed{P_m = \frac{P_{\text{fuite}}}{e}} \qquad \text{AN : } \underline{P_m \simeq 7{,}37\,\text{kW}}$$

Q.8 Par définition du rendement du moteur **électrique** : $\eta = \dfrac{P_m}{P_e}$ soit $\boxed{P_e = \dfrac{P_m}{\eta}}$ <u>AN : $P_e \simeq 12{,}3\,\text{kW}$</u>

Avec un chauffage électrique, toute la puissance électrique est convertie par effet Joule en chauffage. En régime stationnaire pour la même température, la consommation serait égale à P_{fuite}. D'où l'écart relatif :

$$\boxed{\frac{P_{\text{fuite}} - P_e}{P_{\text{fuite}}} \simeq 39\%}$$

Solution de l'exercice 2 : Coût énergétique de la mise en orbite d'un satellite.

Q.1 L'énergie potentielle associé est de la forme $E_p(r) = \dfrac{K}{r}$ avec ici $K = -\mathscr{G}mM_T$ d'où $\boxed{E_p(r) = -\dfrac{\mathscr{G}mM_T}{r}}$

Q.2 **Théorème du momen cinétique** évalué au centre de force O :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{C^{te}}}$$

Le mouvement du satellite est contenu dans le plan $(\mathscr{P}) \perp \overrightarrow{L_O}(M)$ et passant par le centre de force O.

Q.3 En repérage polaire : $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}} = mr\overrightarrow{u}_r \wedge (\dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z = \overrightarrow{C^{te}}$

D'où : $\boxed{L_O = mr^2(t)\dot{\theta}(t) = C^{te}}$

Q.4 Par application du **Théorème de l'énergie mécanique** au système satellite soumis à la seule force centrale conservative :

$$\boxed{\Delta E_m(M) = W(\overrightarrow{F}) = 0} \Longrightarrow \boxed{E_m(M) = C^{te}}$$

Ici : $E_m(M) = E_c(M) + E_p(M) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \dfrac{K}{r} \underset{L_O^2 = m^2r^4\dot{\theta}^2}{\Longrightarrow} E_m(M) = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{L_O^2}{mr^2} + \dfrac{K}{r}$

$$\boxed{E_{\text{peff}}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{\mathscr{G}mM_T}{r}}$$

Q.5 **Système :** $\{M(m)\}$ satellite supposé ponctuél, **référentiel** géocentrique supposé galiléen.

Bilan : $\overrightarrow{F} = \dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{u}_r = \dfrac{-\mathscr{G}mM_T}{r^2}\overrightarrow{u}_r$

PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F} \Longleftrightarrow -m(r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) = \dfrac{-\mathscr{G}mM_T}{r^2}\overrightarrow{u}_r$ orbite circulaire de rayon $r = C^{te}$

$$/\overrightarrow{u}_r \ : \ -mr\dot{\theta}^2 = \frac{-\mathscr{G}mM_T}{r^2} \Longrightarrow r^2\dot{\theta}^2 = v^2 = \frac{\mathscr{G}M_T}{r} \Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{r}} = C^{te}}$$

Q.6 On en déduit alors que : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2(M) \Longrightarrow \boxed{E_c = \dfrac{1}{2}m\dfrac{\mathscr{G}M_T}{r}}$, comme $E_p = -\dfrac{\mathscr{G}mM_T}{r}$ on a :

$$\boxed{E_m(M) = -\frac{1}{2}\frac{\mathscr{G}mM_T}{r} = C^{te} < 0} \quad \text{correspond à un état lié.}$$

Q.7 AN : $\underline{E_{mb} = -1{,}0 \times 10^{11}\,\text{J}}$ et $\underline{E_{mh} = -2{,}0 \times 10^{10}\,\text{J}}$.

Q.8 Il faut traduire le fait que r_b et r_h sont solutions de l'équation : $\boxed{E_m(r) = E_{\text{peff}}(r_{\text{b,h}}) = C^{te}}$

Soit $E_m = \dfrac{L_O^2}{2mr_{\text{b,h}}^2} - \dfrac{\mathscr{G}M_Tm}{r_{\text{b,h}}} \Longleftrightarrow \boxed{E_m r_{\text{b,h}}^2 + \mathscr{G}M_Tmr_{\text{b,h}} - \dfrac{L_O^2}{2m} = 0}$ où $\begin{cases} r_\text{b} + r_\text{h} = -\dfrac{\mathscr{G}M_Tm}{E_m} \\ r_\text{b} + r_\text{h} = 2a \end{cases}$

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathscr{G}M_Tm}{2a} < 0} \quad \text{énergie mécanique du satellite sur son orbite de transfert elliptique.}$$

Q.9 On rappelle qu'à l'apogée r_h et au périgé r_b, l'énergie potentielle effective s'identifie à l'énergie mécanique E_{mt} du satellite sur son orbite de transfert elliptique.

$$E_{mt} = E_{\text{peff}}(r = r_\text{h}) = E_{\text{peff}}(r = r_b)$$

On relève alors la valeur de l'énergie potentielle effective de l'orbite de transfert pour $r_\text{b} = 8{,}0 \times 10^3\,\text{km}$ (plus de précision) qui correspond également à l'énergie mécanique de l'ellipse de transfert :

$$\underline{E_{mt} \simeq -30\,\text{GJ}}$$

Q.10 Énergie mécanique du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon r_b : $\underline{E_{mb} \simeq -100\,\text{GJ}}$ compatible avec Q.7
Énergie mécanique du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon r_h : $\underline{E_{mh} \simeq -20\,\text{GJ}}$ compatible avec Q.7.
car les trajectoires circulaires correspondent aux minimum d'énergie potentielle effective.

Q.11 La variation d'énergie mécanique à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse (r_b, E_{mb}) à l'orbite elliptique de transfert $(2a, E_{mt})$ vaut :

$$\boxed{\Delta E_m = E_{mt} - E_{mb}} \quad \text{AN : } \underline{\Delta E_m \simeq 70\,\mathrm{GJ} > 0} \quad \text{(apport énergie au satellite)}$$

Q.12 Pour réaliser une telle opération, il faut une masse m_c de carburant :

$$\boxed{m_c = \frac{\Delta E_m}{q}} \quad \text{AN : } \underline{m_c \simeq 1{,}4 \times 10^3\,\mathrm{kg}} \quad \text{(proche de la masse du satellite !)}$$

Solution de l'exercice 3 : Analyse expérimentale des vibrations du verre

Q.1 Les modes propres correspondent aux fréquences d'oscillations libres du verre (comme pour la corde de Melde). Le mode propre de plus basse fréquence est appelé **fondamental**, les autres sont les **harmoniques** de rang n. Le signal enregistré étant périodique mais non sinusoïdal, son spectre comporte nécessairement des harmoniques.

Q.2 On cherche ici la fréquence du **fondamental** relevée à $\underline{f_1 \simeq 0{,}54\,\mathrm{kHz}}$

Q.3 Grâce au retard $\tau \simeq 0{,}75\,\mathrm{s}$ relevé sur la **figure 5** et le diamètre $d = 12\,\mathrm{cm}$ du verre à pied (frappé au niveau du bord supérieur à $t = 0$), on estime la vitesse de propagation de la déformation : $v = \dfrac{d}{\tau}$ soit $\underline{\text{AN : } v \simeq 0{,}16\,\mathrm{cm}}$

Q.4 On relève alors : $\underline{f_2 \simeq 1{,}09\,\mathrm{kHz}}$, $\underline{f_3 \simeq 1{,}64\,\mathrm{kHz}}$, $\underline{f_4 \simeq 2{,}18\,\mathrm{kHz}}$ liés par la relation : $\boxed{f_n = nf_1}$

Q.5 Il faut que le microphone ait une **réponse plate** sur l'intervalle de fréquence étudié soit un **gain constant** (cf **figure 4?**) entre 0,1 kHz et 10 kHz.

Q.6 L'amplitude des harmoniques diminue lorsque le rang n augmente (et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$). On retrouve les même modes propres mais avec une atténuation qui diminue avec le rang de l'harmonique.

Q.7 **Système :** $\{M(m)\}$ verre assimilé à un point matériel. Étude menée dans le **référentiel Terrestre supposé galiléen** $\mathscr{R}_T(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

Bilan :

- $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$
- $\vec{R_N} = \|\vec{R_N}\|\vec{u}_y$ la réaction normale du support.
- $\vec{f} = -\alpha\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}_T}$ avec $\alpha > 0$ la force de frottement fluide.
- $\vec{F} = -k(l(t) - L_0)\vec{u}_{O\to M} = -kx(t)\vec{u}_x$ la force de rappel du ressort.

PFD : $\boxed{m\vec{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \vec{P} + \vec{f} + \vec{R_N} + \vec{F}}$

$$/\vec{u}_x \ : \ m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx \Longleftrightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{avec} \quad \left|\begin{array}{l} \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} \Longleftrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}} \\ \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{\alpha}{m} \Longleftrightarrow \boxed{Q = \dfrac{m\omega_0}{\alpha}} \end{array}\right.$$

Q.8 ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur amorti en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et Q est le fecteur de qualité sans unité.

Q.9 Il s'agit ici de résoudre l'EDL$_2$: $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ compte tenu de $x(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = V_0$ dans le cas d'un frottement faible soit en **régime transitoire pseudopériodique** ($Q > 1/2$).

équation caractéristique associée à l'ESSM : $\boxed{r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0}$ de discriminant $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4Q^2} - 1\right)$

avec un amortissement faible : $Q > \dfrac{1}{2}$ soit $\boxed{\Delta < 0}$, on obtient 2 racines complexes conjuguées :

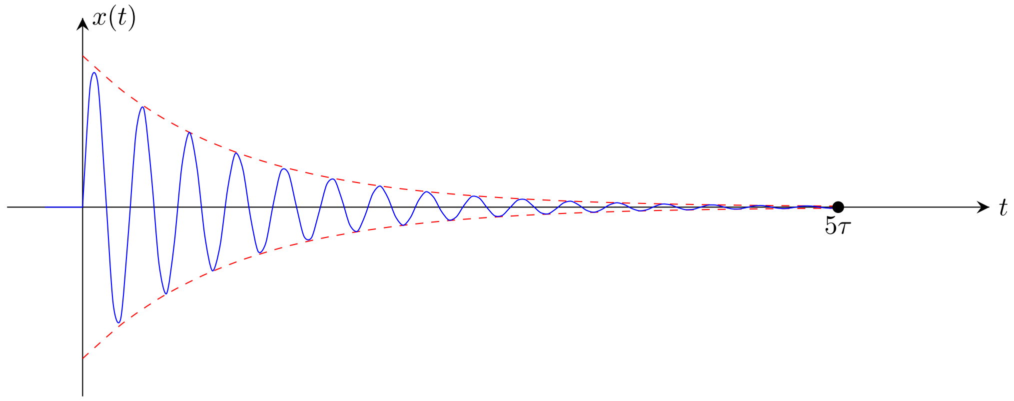
$$\underline{r_{1,2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \quad \text{où} \quad \left|\begin{array}{l} \boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}} \text{ le temps caractéristique du régime pseudo-périodique.} \\ \boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}} \text{ la pseudo pulsation} \end{array}\right.$$

On admet alors $\boxed{x_h(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]}$

Par linéarité de l'EDL$_2$: $x(t) = x_p + x_h(t)$ avec ici $x_p = 0$ d'où $\boxed{x(t) = e^{-t/\tau}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]}$

On applique les conditions initiales : $x(0) = 0 \iff A = 0$ et $\dot{x}(0) = V_0 \iff B\Omega = V_0$

$$\boxed{x(t) = e^{-t/\tau}\frac{V_0}{\Omega}\sin(\omega t) = \frac{V_0}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\sin\left(\omega_0 t\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)}$$



Q.10 En accord avec la **figure 5**, on retrouve une diminution exponentielle de l'amplitude des oscillations. La modélisation par un frottement fluide est pertinente.

Q.11 La **figure 7** nous montre que **l'amplitude du fondamental est "divisée par 2" toutes les secondes** ; l'amplitude des oscillations de la réponse $x(t)$ y est donc divisée par 2 également telle que sur les 2 premiers spectres :

$$\left|\begin{array}{l} X_1 = X(t_1 = 1s) = X_m e^{-\frac{\omega_0 t_1}{2Q}} \simeq 4 \\ X_2 = X(T_2 = 2s) = X_m e^{-\frac{\omega_0 t_2}{2Q}} \simeq 2{,}1 \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{X_2}{X_1} = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}(t_2 - t_1)} \Longrightarrow \boxed{Q \simeq \frac{\omega_0}{2\ln(2)}}$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi f_1$ avec $f_1 \simeq 0{,}5\,\text{kHz}$ AN : $Q \simeq 2438 \sim 10^3 \gg 1$ en accord avec un faible amortissement.

Q.12 Le RSF commence après le régime transitoire pseudo périodique de durée de l'ordre de 5τ avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$.

Le temps nécessaire pour mettre le système en RSF est de l'ordre de $\boxed{\Delta t \simeq \dfrac{10Q}{\omega_0}}$ soit AN : $\Delta t \simeq 7{,}2\,\text{s}$ en accord avec le chronogramme de la **figure 5**.

Q.13 $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe associée au signal complexe $\underline{x} = \underline{X}e^{j\omega t}$.
De module : $|\underline{X}| = X$ l'amplitude réelle, et d'argument : $\arg(\underline{X}) = \varphi$ le déphasage.

Q.14 On réécrit l'EDL$_2$ en notations complexes : $\ddot{\underline{x}} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = A_0 e^{j(\omega t + \Phi)}$

$$\left(-\omega^2\underline{X} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{X} + \omega_0^2\underline{X}\right)\cancel{e^{j\omega t}} = A_0 e^{j\Phi}\cancel{e^{j\omega t}} \longleftrightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{A_0 e^{j\Phi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}} \Longrightarrow \boxed{X = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

Q.15
$$\left.\begin{array}{l} \text{Étude en BF : } X \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{A_0}{\omega_0^2} \neq 0 \text{ constante positive} \\ \text{Étude en HF : } X \underset{\omega\to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right\} \text{en accord avec le graphe 2.}$$

Q.16 L'amplitude réelle $X(\omega)$ passe par un maximum si et seulement si la fonction $g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2$ passe par un minimum. On résout alors : $g'(\omega_r) = 0 \iff 2\times(-2\omega_r)\times(\omega_0^2 - \omega_r^2) + \dfrac{2\omega_r\omega_0^2}{Q^2} = 0$

soit $2\omega_r\left[\dfrac{\omega_0^2}{Q^2}-2(\omega_0^2-\omega_r^2)\right]=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \omega_r = 0 \text{ qui ne correspond pas à une oscillation.} \\ \omega_r^2=\omega_0^2\left(1-\dfrac{1}{2Q^2}\right)>0 \text{ existe si } \boxed{Q>Q_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

Q.17 Dans le cas d'une résonance d'amplitude, on en déduit la pulsation de résonance notée ω_r : $\boxed{\omega_r=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}}$.

Q.18 Dans le cas où $Q \gg Q_0$ soit $Q^2 \gg \dfrac{1}{2}$ on obtient $\boxed{\omega_r \simeq \omega_0}$

Q.19 Soit $X_r = X(\omega_r) = X(\omega_0) \Longrightarrow \boxed{X_r=\dfrac{A_0Q}{\omega_0^2}}$

Q.20 Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 sont définies par $\boxed{X(\omega_{1/2})=\dfrac{X_r}{\sqrt{2}}}$. On rappelle la relation : $\boxed{Q=\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}=\dfrac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}}$

Q.21 On relève la fréquence de résonance $\underline{f_r \simeq 539{,}6\,\text{Hz}}$ ainsi que les 2 fréquences de coupure : $\underline{f_1 \simeq 539{,}5\,\text{Hz}}$ et $\underline{f_2 \simeq 539{,}7\,\text{Hz}}$. On en déduit le facteur de qualité : $\boxed{Q=\dfrac{f_r}{f_2-f_1}}$ $\underline{\text{AN : } Q \simeq 2698}$ écart expliqué par le manque de précision à la Q11.

· · · **FIN** · · ·