

## CB2 du 03/06 : Physique-chimie (Durée : 4h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements.

Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.

Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.

Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).

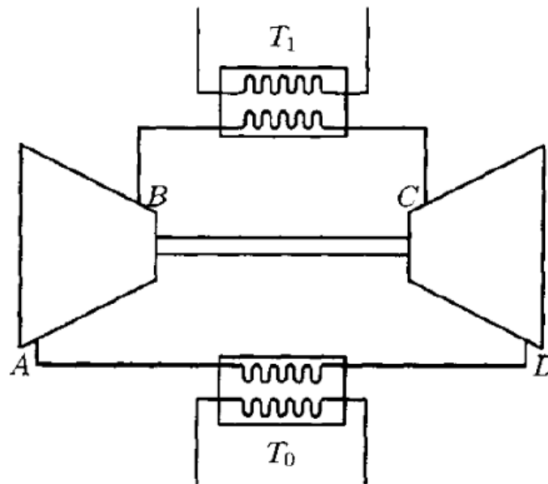
Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**. La calculatrice est autorisée, le téléphone interdit.

Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

### Exercice 1 : Étude d'une pompe à chaleur

Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant, dans lequel le fluide (air) est modélisé tout au long du cycle comme un gaz parfait :

- L'air pris dans l'état  $A$  de température  $T_0$  et de pression  $P_0$  est comprimé suivant une adiabatique mécaniquement réversible jusqu'au point  $B$  où il atteint la pression  $P_1$ .
- Le gaz se refroidit à pression constante et atteint la température de la source chaude  $T_1$  correspondant à l'état  $C$ .
- L'air est ensuite refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique mécaniquement réversible pour atteindre l'état  $D$  de pression  $P_0$ .
- Le gaz se réchauffe enfin à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial  $A$ .



On considère l'air comme un gaz parfait diatomique de coefficient adiabatique  $\gamma = 1,40$ .

On posera  $\beta = 1 - \gamma^{-1}$  et  $a = \frac{P_1}{P_0}$ .

Pour les applications numériques, on prendra :

- |  |   |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>T_0 = 283 \text{ K}</math> ;</li> <li>• <math>T_1 = 298 \text{ K}</math> ;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>a = 5,00</math> ;</li> <li>• <math>R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}</math> (constante des gaz parfaits).</li> </ul> |
|--|---|

**Q.1** Représenter le cycle parcouru par le fluide dans un diagramme de Watt ( $P, V$ ), ainsi que les isothermes  $T_0$  et  $T_1$ .

On indiquera les états par les lettres associées et on commentera le sens de parcours du cycle.

**Q.2** Exprimer les températures  $T_B$  et  $T_D$  en fonction de  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $a$  et  $\beta$ . Calculer leurs valeurs.

**Q.3** Définir l'efficacité  $e$  de la pompe à chaleur à partir des quantités d'énergies échangées au cours du cycle.

Montrer qu'elle s'exprime seulement en fonction de  $a$  et  $\beta$ . Calculer sa valeur.

**Q.4** Quelles doivent être les transformations du fluide si on envisage de faire fonctionner la pompe à chaleur suivant un cycle de Carnot entre les températures  $T_0$  et  $T_1$  ?

Représenter ce cycle en superposition sur le précédent graphe. On considérera les mêmes pressions extrêmes

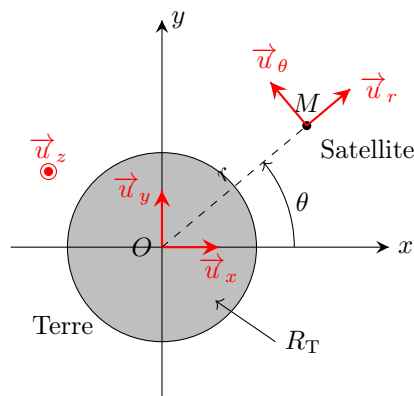
$P_0$  et  $P_1$ , et on notera les états  $A$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$ .

- Q.5** Exprimer la quantité d'entropie créée sur le cycle de Carnot et montrer que le cycle de Carnot est réversible.
- Q.6** Établir l'expression de l'efficacité  $e_C$  du cycle de Carnot en fonction de  $T_1$  et  $T_0$ . Calculer sa valeur. Commenter.
- Q.7** La pompe à chaleur envisagée est utilisée pour chauffer une maison.  
Sachant qu'en régime permanent les fuites thermiques s'élèvent à une puissance  $P_{\text{fuite}} = 20,0 \text{ kW}$ , calculer la puissance mécanique  $P_m$  du couple compresseur-turbine qui permet de maintenir la maison à température constante.
- Q.8** Pour ce régime, le rendement du moteur électrique faisant tourner l'arbre compresseur-turbine est de 60%.  
En déduire la puissance électrique consommée  $P_e$  par cette installation en régime stationnaire.  
Quel pourcentage d'économie est fait par rapport à la consommation qu'aurait un chauffage électrique dans la même maison ?

## Exercice 2 : Coût énergétique de la mise en orbite d'un satellite.

On vous propose d'estimer dans ce problème le coût énergétique de la mise en orbite haute d'un satellite en calculant la masse de carburant nécessaire pour réaliser une telle opération. Le satellite étudié est assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m = 4,0 \times 10^3 \text{ kg}$  en orbite autour de la Terre de rayon  $R_T = 6,4 \text{ km}$ , de masse  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  et de centre  $O$ .

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique ( $\mathcal{R}_g$ ) de repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  supposé galiléen.



### Partie A : Généralités sur les forces centrales conservatives

On rappelle que l'interaction  $\vec{F}$  exercée par la Terre sur le satellite est une force centrale conservative newtonienne attractive qui peut s'écrire :

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{avec} \quad r = OM$$

Dans la suite, on supposera que le satellite est soumis uniquement à cette force  $\vec{F}$ .

- Q.1** Rappeler, sans la démontrer, l'expression de l'énergie potentielle associée  $E_p(r)$  en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  et  $r$ .
- Q.2** Montrer que le moment cinétique du satellite évalué au centre de force  $O$  fixe est une constante du mouvement.  
En déduire que le mouvement du satellite est plan.
- Q.3** Déterminer l'expression de la norme  $L_O = \|\vec{L}_O(M)\|$  du moment cinétique du satellite en fonction de  $r$ ,  $\dot{\theta}$  et  $m$ .
- Q.4** Justifier que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2(t) + E_{\text{peff}}(r)$$

où  $E_{\text{peff}}(r)$  est l'énergie potentielle effective à exprimer en fonction de  $L_O$ ,  $m$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$  et  $r$ .

### Partie B : Mise en orbite circulaire du satellite

La mise en orbite du satellite se fait en deux étapes :

- phase balistique : la satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- phase de satellisation : le satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

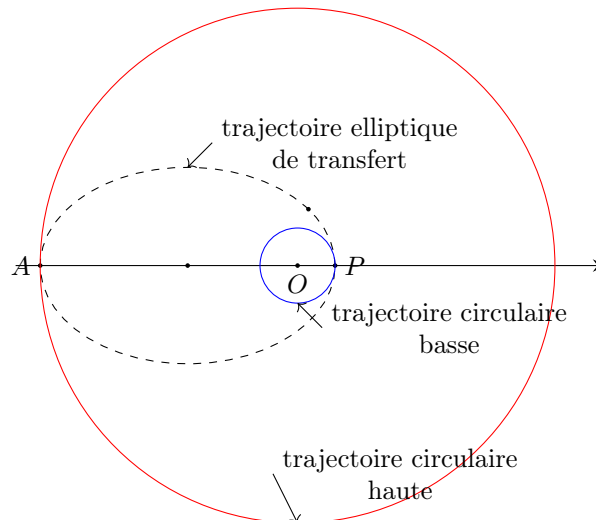
On considère que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon  $r$  constant autour de la Terre.

- Q.5** Exprimer la vitesse  $v$  du satellite sur son orbite circulaire de rayon  $r$  constant puis montrer que le mouvement circulaire est uniforme.
- Q.6** En déduire l'expression des énergies cinétiques  $E_c$  et mécanique  $E_m$  du satellite en fonction de  $\mathcal{G}$ ,  $M_T$ ,  $m$  et  $r$ . Justifier le signe de l'énergie mécanique.
- Q.7** Calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon  $r_b = 8,0 \times 10^3$  km puis pour un rayon  $r_h = 40 \times 10^3$  km.

### Partie C : Mise en orbite haute du satellite

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ( $r_b = 8,0 \times 10^3$  km) puis dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ( $r_h = 40 \times 10^3$  km) comme illustré sur la **figure 1**.

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique de demi-grand axe  $a$  dont l'un des foyers est le centre de la Terre  $O$  : son périégée  $P$  est situé sur l'orbite basse et son apogée  $A$  sur l'orbite haute.



**Figure 1** - Ellipse de transfert

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

- Q.8** Montrer que l'énergie mécanique du satellite sur son orbite de transfert elliptique s'exprime selon :

$$E_m = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2a}$$

- Q.9** Relever sur la **figure 2** la valeur de l'énergie mécanique  $E_{mt}$  du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique. Justifier soigneusement le relevé.

Pour changer le satellite de trajectoire, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase, le principe de conservation de l'énergie mécanique n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

- Q.10** Relever sur la **figure 2** la valeur de l'énergie mécanique  $E_{mb}$  du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon  $r_b = 8,0 \times 10^3$  km. Faire de même pour l'orbite circulaire haute de rayon  $r_h = 40 \times 10^3$  km. Justifier soigneusement le relevé.
- Q.11** En déduire la variation d'énergie mécanique  $\Delta E_m$  à communiquer au satellite pour passer en  $P$  de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert.
- Q.12** Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ  $q = 50 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ , déterminer la masse  $m_c$  de carburant nécessaire. Effectuer l'application numérique correspondante.

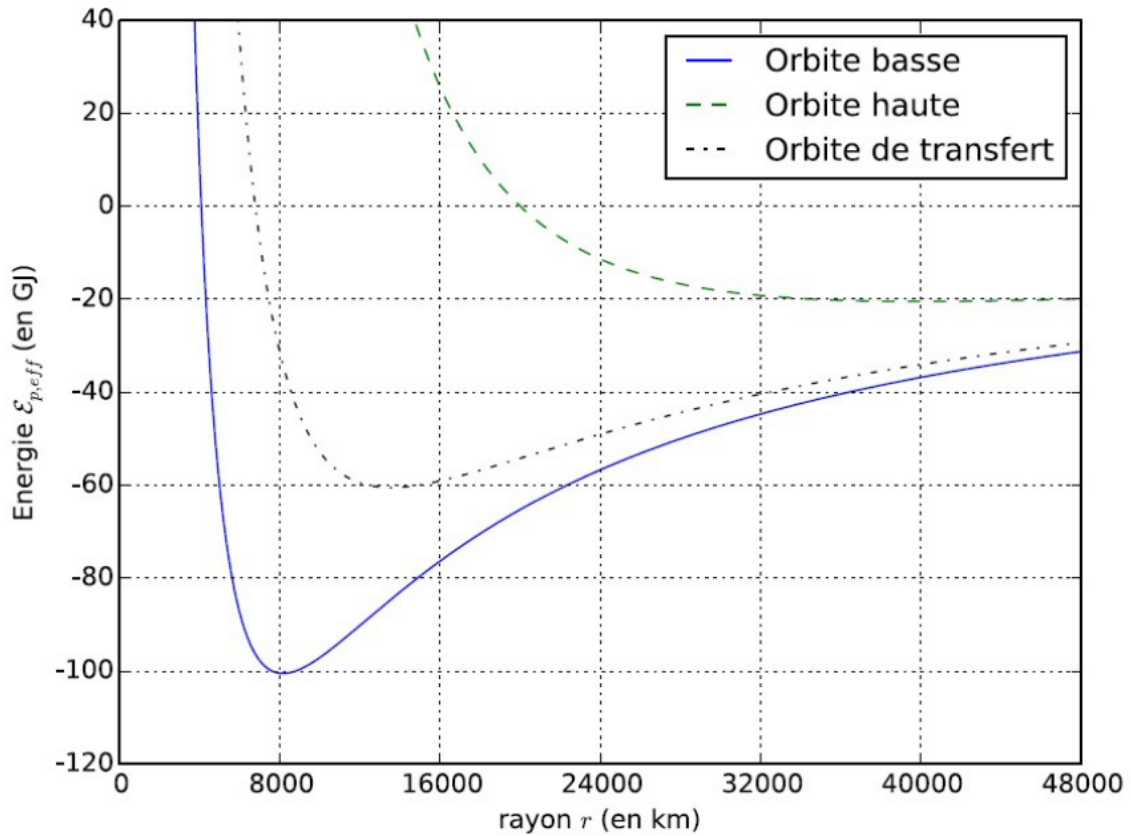


Figure 2 - Énergies potentielles effectives pour les trois orbites.

### Exercice 3 : Analyse expérimentale des vibrations du verre

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration.

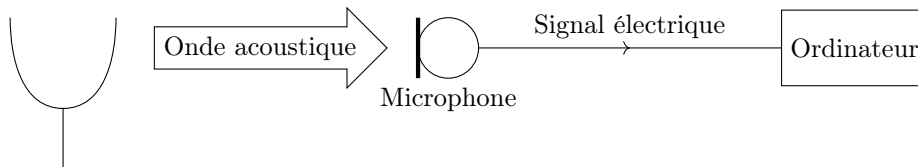


Figure 3 -

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant  $t = 0$ , au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur. Son analyse spectrale peut alors être réalisée à tout moment de l'enregistrement. Le microphone utilisé pour l'enregistrement présente une courbe de réponse en fonction de la fréquence donnée sur la **figure 4**

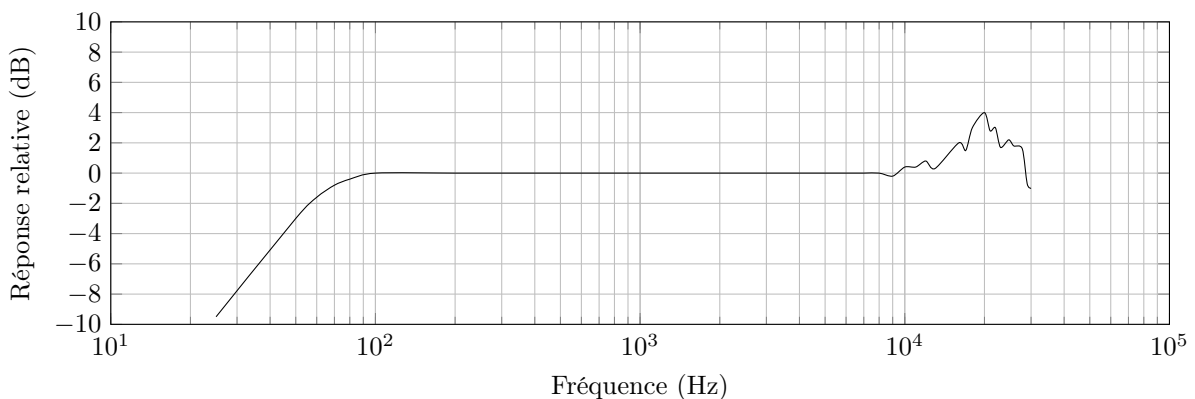
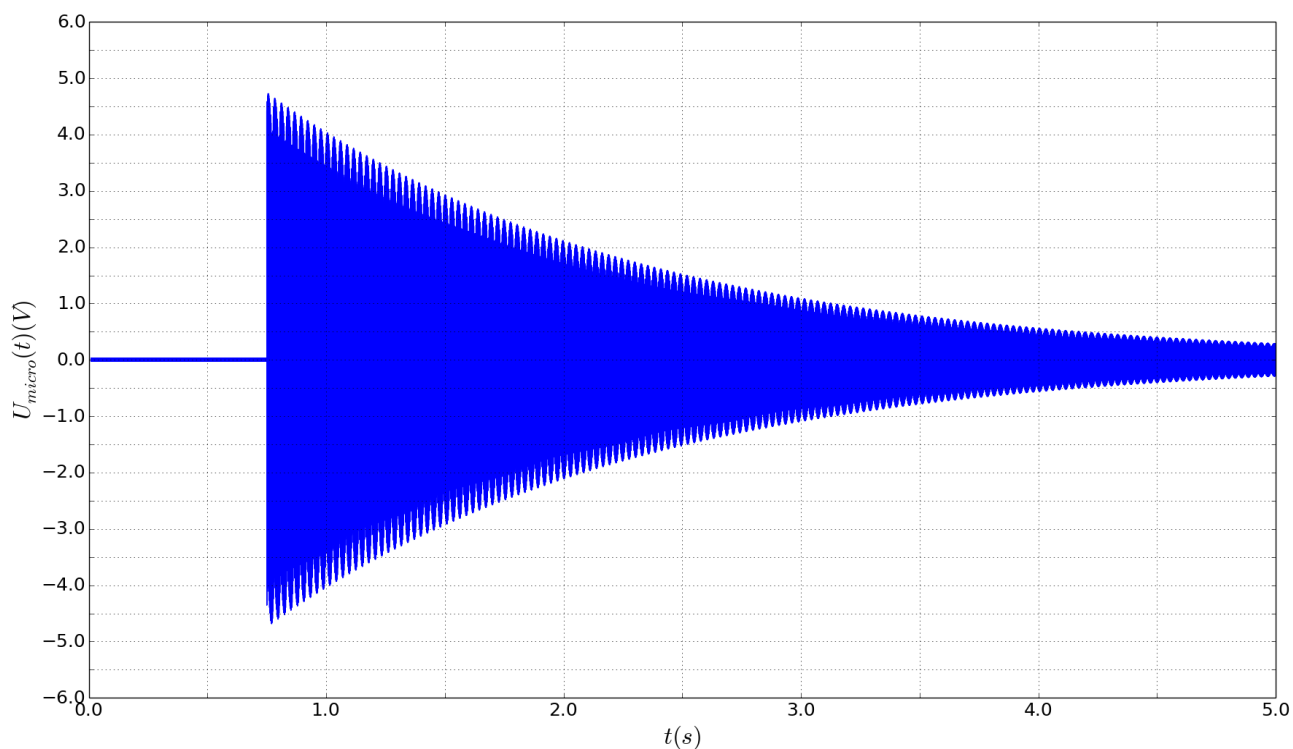
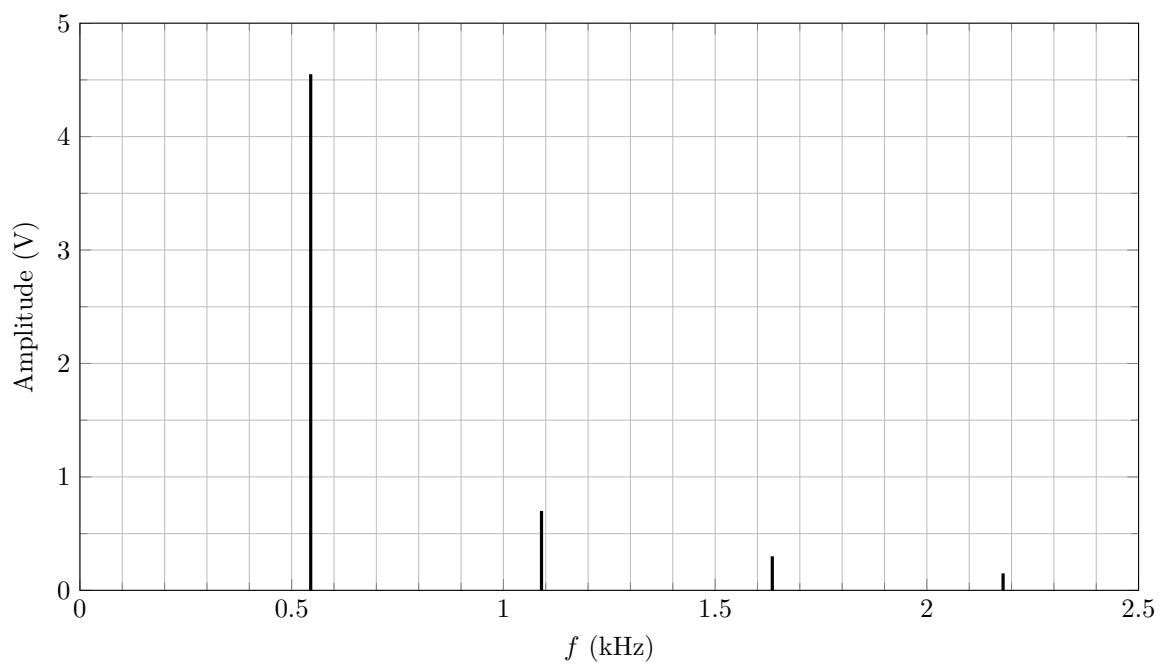


Figure 4 - Réponse relative du microphone en fonction de la fréquence

La **figure 5** représente le chronogramme de cet enregistrement et la **figure 6** une analyse spectrale réalisée peu après le début de l'enregistrement. La **figure 7** présente son analyse spectrale aux dates  $t = 1,0\text{ s}$ ,  $2,0\text{ s}$ ,  $3,0\text{ s}$  et  $4,0\text{ s}$ .



**Figure 5** - Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre



**Figure 6** - Analyse spectrale du son réalisée peu après la frappe du verre

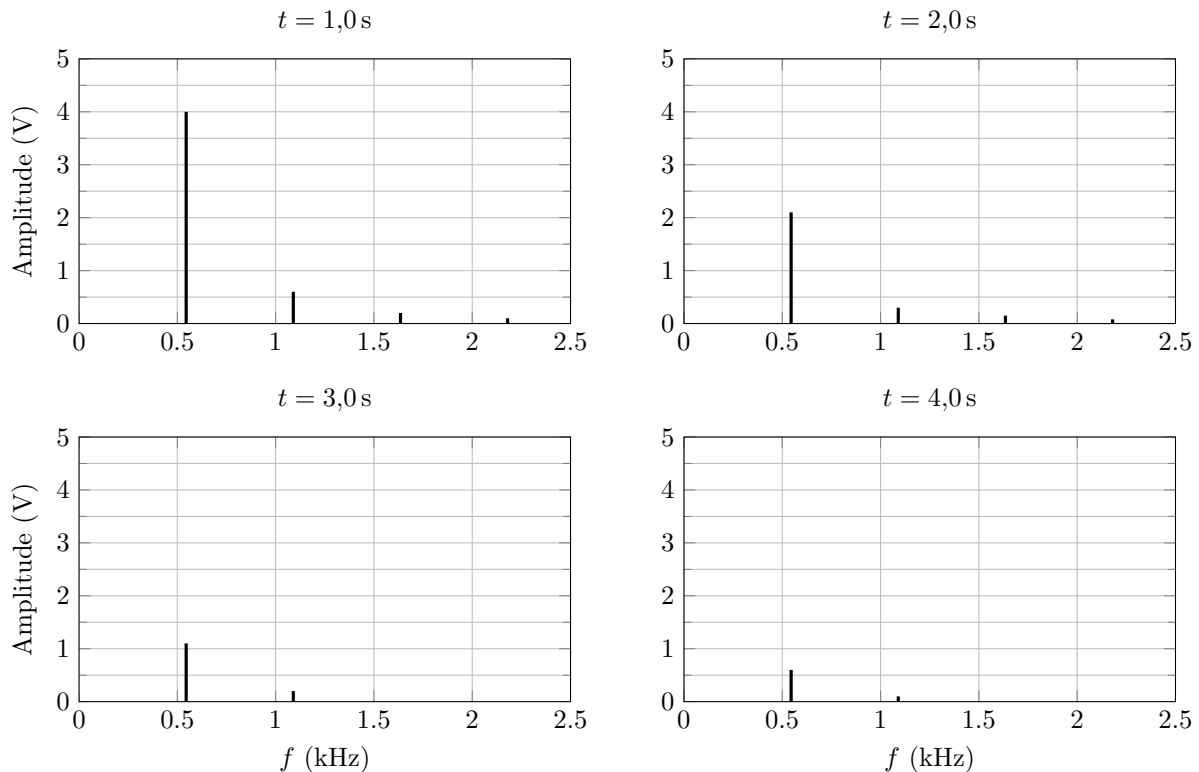


Figure 7 - Analyse spectrale du son à différents instants après la frappe du verre

### 1 Analyse qualitative de l'enregistrement

Les «pics» représentés dans les analyses spectrales correspondent à des modes propres de vibration du verre.

- Q.1 Que signifie la présence de modes propres dans le signal enregistré ? Comment peut-on les nommer ?
- Q.2 Quelle est la fréquence du signal enregistré ?
- Q.3 En limitant le raisonnement au bord supérieur du verre, estimer la vitesse de propagation de la déformation causée par le choc.
- Q.4 Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple ; laquelle ?
- Q.5 Quelle caractéristique de la courbe en **figure 4** de réponse du microphone est essentielle pour réaliser un enregistrement et une analyse spectrale représentant correctement le phénomène étudié ?
- Q.6 Quelle(s) autre(s) information(s) peut-on déduire des différentes analyses spectrales ?

### 2 Estimation du facteur de qualité Q

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse  $m$  mobile sur l'axe ( $Ox$ ) horizontal associée à un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide nulle (**figure 8**). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\vec{v}$  désigne le vecteur vitesse de la masse  $m$ .



Figure 8 - Modèle mécanique du déplacement

- Q.7 Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de  $x(t)$  s'écrit de la façon suivante, avec  $\omega_0$  et  $Q$  deux constantes que l'on exprimera en fonction de  $\alpha$ ,  $k$  et  $m$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

- Q.8 Quelle est la signification physique de  $\omega_0$  et de  $Q$  ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ?

- Q.9** Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas d'un frottement «faible», l'expression approchée de la solution  $x(t)$  avec les conditions initiales  $x(0) = 0$  et  $\frac{dx}{dt}(0) = V_0$ . Représenter son allure.
- Q.10** En quoi, l'enregistrement de la **figure 5** est-il en accord à la modélisation par un frottement fluide ?
- Q.11** Proposer, à partir de l'évolution temporelle du mode 1 sur les analyses spectrales, un ordre de grandeur du facteur de qualité  $Q$ .

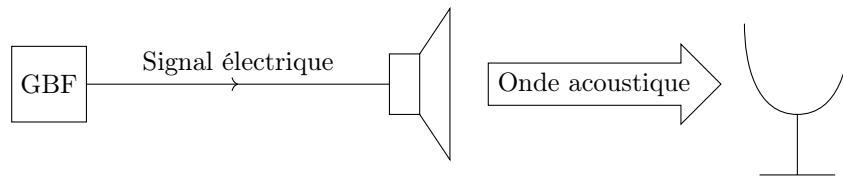
Dans la suite de l'expérience, on va chercher à mettre en résonance le verre à l'aide d'une excitation sinusoïdale.

- Q.12** Donner une estimation du temps nécessaire pour mettre le système en régime sinusoïdal forcé.

### 3 Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un hautparleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence  $f$ . Le verre, placé à proximité du hautparleur (**figure 9**), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.



**Figure 9 -**

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de  $x(t)$  est alors de la forme suivante, avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $\Phi$  la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme  $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ . Comme en électrocinétique, on introduit la grandeur complexe associée  $\underline{x}(t) = \underline{X} \exp(j\omega t)$  avec  $j^2 = -1$ .

- Q.13** Comment nomme-t-on la grandeur  $\underline{X}$  ? Que représente son module, son argument ?
- Q.14** Établir l'expression du module de  $\underline{X}$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $A_0$  et  $Q$ .
- Q.15** À partir d'une étude qualitative, justifier le numéro de graphe de la **figure 10** compatible avec le tracé du module de  $\underline{X}$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .
- Q.16** À quelle condition sur le facteur de qualité peut-on envisager une résonance d'amplitude ?  
On note  $Q_0$  cette condition.
- Q.17** Dans le cas d'une résonance d'amplitude, exprimer la pulsation correspondante, notée  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

Dans la suite, on suppose  $Q \gg Q_0$ .

- Q.18** Quelle est alors l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$  ?
- Q.19** On note  $X_r$  le module de  $\underline{X}$  pour  $\omega = \omega_r$ . Établir son expression en fonction de  $\omega_0$ ,  $A_0$  et  $Q$ .
- Q.20** Définir les pulsations de coupure  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ) du module de  $\underline{X}$ . Rappeler la relation liant  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ .

Une série de mesure de l'amplitude  $X$  au voisinage de la résonance permet de tracer le graphe représenté sur la **figure 11**.

- Q.21** Déterminer, à partir de la **figure 11**, la fréquence de résonance  $f_r$  et le facteur de qualité  $Q$  du verre dans son mode 1. Comparer ces résultats à ceux précédents.

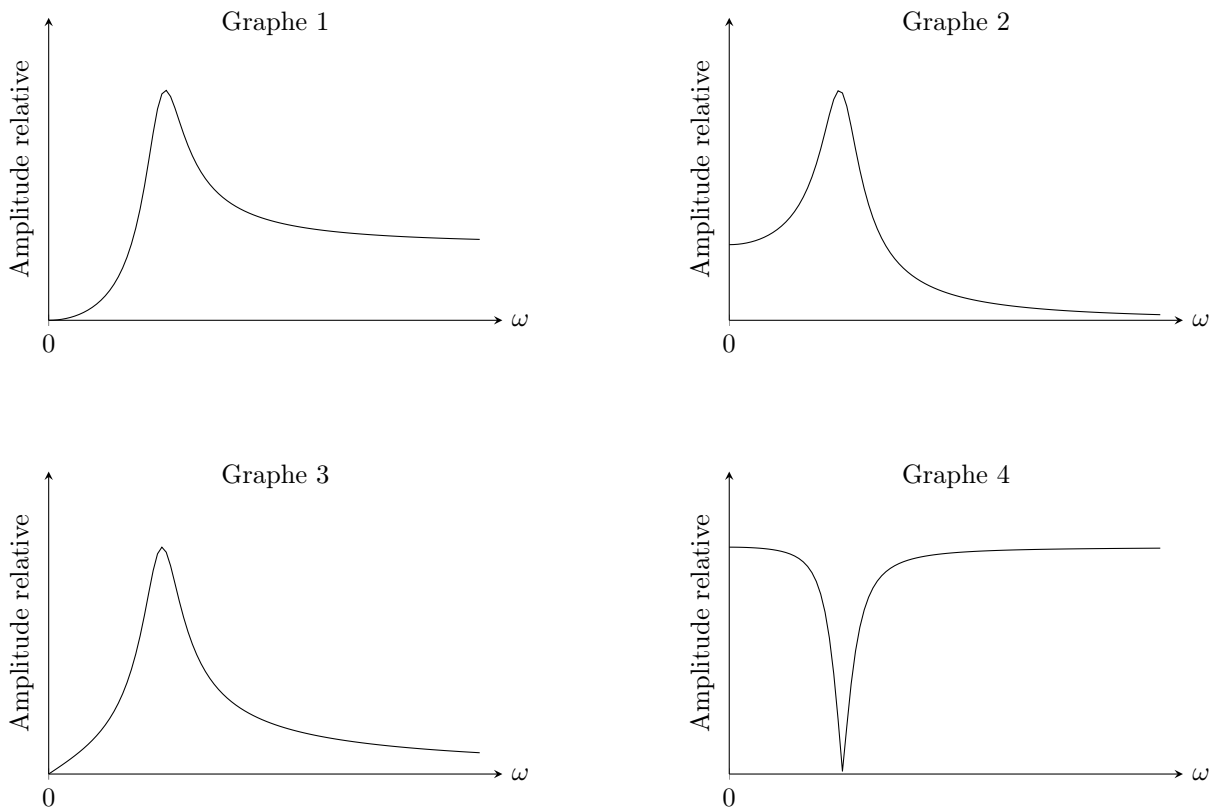


Figure 10 - Module de  $\underline{X}$  en fonction de  $\omega$

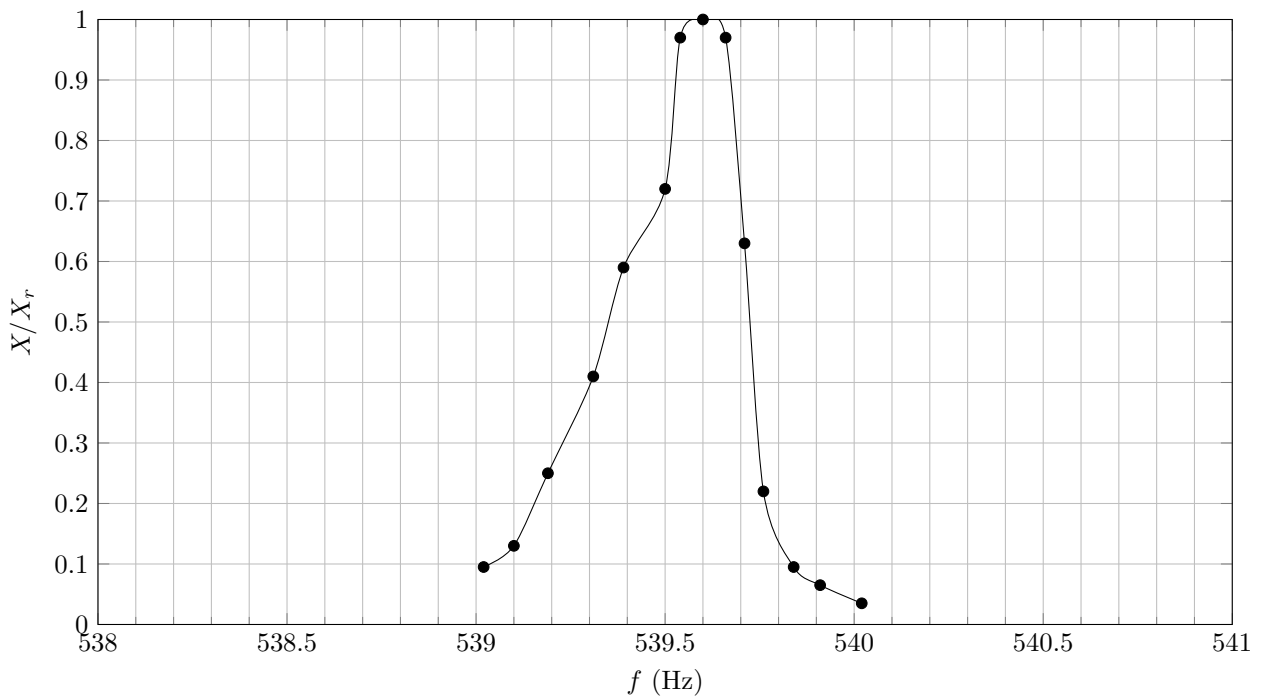


Figure 11 - Amplitude relative en fonction de la fréquence

... FIN ...