Devoir commun de Mathématiques — 1er juin 2017

La clarté des raisonnements, la précision de la rédaction et la présentation entreront pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies.

Les résultats non justifiés ou non encadrés ne seront pas pris en compte.

L'utilisation de tout document, de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Problème 1 — Méthodes d'intégration numériques

Notations. Ci-dessous la liste des conventions et notations utilisées tout au long du problème.

- a et b sont deux réels, avec $a < b$; et n désigne un entier naturel non nul.
- On note $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ la subdivision régulière de $[a, b]$ de pas $h = \dfrac{b-a}{n}$, c'est à dire que :
$$\forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!],\ x_k = a + kh$$
- f désigne une fonction continue sur $[a, b]$. On note : $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; et pour tout entier k compris entre 0 et $(n-1)$ on note : $I_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Lorsque φ désigne une fonction définie sur un segment $[c, d]$, on dira que φ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $[c, d]$ si : 1) φ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]c, d[$; 2) φ est m fois dérivable à droite en c (*resp.* à gauche en d) ; 3) $\varphi^{(m)}$ est continue à droite en c (*resp.* à gauche en d).
- Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ désigne un polynôme à coefficients réels, on identifiera celui-ci avec la fonction polynomiale qui lui est associée, càd la fonction définie sur $\mathbb{R}$ en posant : $\forall\, t \in \mathbb{R},\ P(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k t^k$

Problématique. *Il existe différentes méthodes pour calculer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Le principe des méthodes intervenant dans ce problème est le même : on construit une subdivision régulière $(x_0, \ldots, x_n)$ de l'intervalle $[a, b]$, et sur chacun des sous-intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ on approche f par une fonction polynomiale P (de telle sorte que l'intégrale de P soit "simple" à calculer). Cette fonction polynomiale peut être de degré au plus 0 (méthode des rectangles médians, partie I), de degré au plus 1 (méthode des trapèzes, partie II) ou de degré au plus 2 (méthode de Simpson, partie III). L'objectif principal de ce problème est de comparer ces différentes méthodes.*

1. On rappelle ci-dessous un énoncé rencontré cette année.

> Théorème de Rolle. Soient c et d deux réels tels que $c < d$, et φ une fonction continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]\, c, d\, [$. Sous ces hypothèses :
> $$\exists\, \alpha \in\ ]\, c, d\, [\, ,\ \varphi'(\alpha) = 0$$

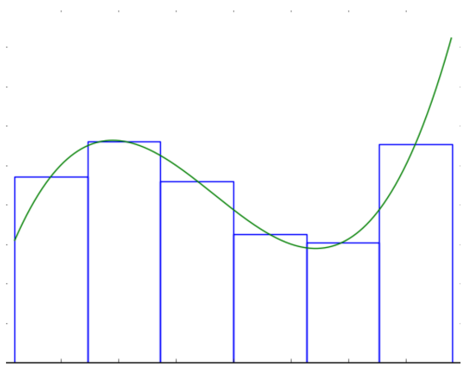
Redémontrer le théorème de Rolle (*indication : on pourra distinguer deux cas suivant que la fonction φ est ou n'est pas constante sur $[a, b]$*).

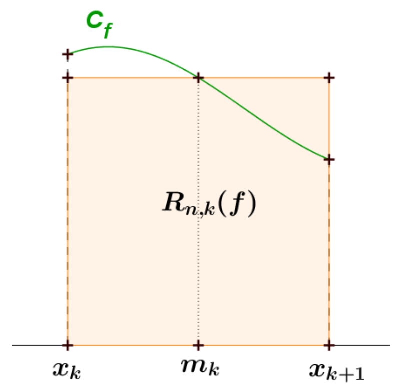
Partie I — Méthode des rectangles médians

Tout au long de la partie I, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.

Par ailleurs dans cette partie, on approche f sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ par la fonction constante égale $f(m_k)$, où $m_k = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}$ désigne le milieu du segment $[x_k, x_{k+1}]$.

On note $R_{n,k}(f)$ l'aire algébrique du rectangle construit sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$, et de “hauteur” $f(m_k)$; et on note $R_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} R_{n,k}(f)$. Les figures ci-dessous illustrent cette construction.





2. Justifier que : $$I - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(m_k)]\, \mathrm{d}x$$

3. Estimation de l'erreur. Soient c et d deux réels quelconques de $[a,b]$, avec $c < d$.

a. Soit A un nombre réel. On définit une fonction Φ sur $[c,d]$ en posant :

$$\forall x \in [c,d],\ \Phi(x) = f(d) - f(x) - (d-x)\, f'(x) - A\, \frac{(d-x)^2}{2}$$

Etablir qu'il existe un unique réel A, que l'on explicitera *, tel que : $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$.

b. On suppose à présent A est l'unique réel déterminé à la question précédente. Etablir que :

$$\exists\, \alpha \in \ ]c,d[\ ,\ A = f''(\alpha)$$

c. En déduire que : $f(d) = f(c) + (d-c)\, f'(c) + \dfrac{(d-c)^2}{2}\, f''(\alpha)$

d. Soit k un entier quelconque compris entre 0 et $(n-1)$. Etablir que :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}]\,,\ |f(x) - f(m_k) - (x - m_k)\, f'(m_k)| \leqslant M_2\, \frac{(x-(m_k))^2}{2}$$

e. En déduire que :

$$\forall k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!],\ |I_k - R_{n,k}(f)| \leqslant M_2\, \frac{(b-a)^3}{24n^3}$$

puis que : $|I - R_n(f)| \leqslant M_2\, \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$

$*$. On exprimera A en fonction de c, d, $f(c)$, $f(d)$ et $f'(c)$.

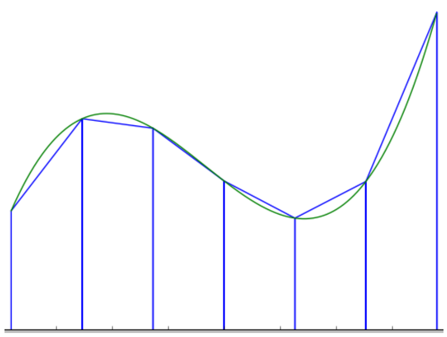
Partie II — Méthode des trapèzes

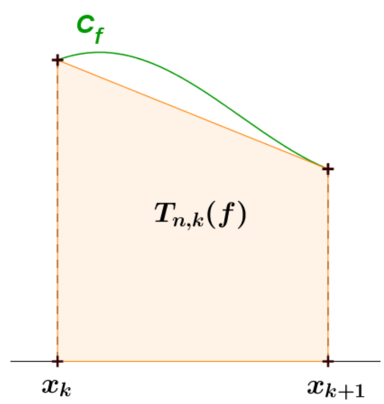
Tout au long de la partie II, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.

Par ailleurs dans cette partie, on approche f sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ par la fonction affine coïncidant avec la fonction f en x_k et en x_{k+1}, càd la fonction g_k définie en posant :

$$\forall\, x \in [x_k, x_{k+1}]\,,\ g_k(x) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h}\,(x - x_k) + f(x_k)$$

On note $T_{n,k}(f)$ l'aire algébrique du trapèze construit sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$, et de "hauteurs" $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$; et on note $T_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} T_{n,k}(f)$. Les figures ci-dessous illustrent cette construction.





Muni de ces notations, on peut écrire : $T_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Justifier que : $\qquad T_n(f) = \dfrac{b-a}{2n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[f(x_k) + f(x_{k+1})\right]$

5. Etablir que : $\qquad \left| \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ - \ T_n(f) \right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - g_k(x)\,\mathrm{d}x \right|$

6. Estimation de l'erreur. Soient c et d deux réels quelconques de $[a,b]$, avec $c < d$.

a. Pour tout réel x dans $[x_k, x_{k+1}]$, on pose : $\delta_k(x) = f(x) - g_k(x)$. A l'aide de deux intégrations par parties, établir que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta''_k(x)\,(x - x_k)\,(x - x_{k+1})\,\mathrm{d}x$$

b. En déduire que :

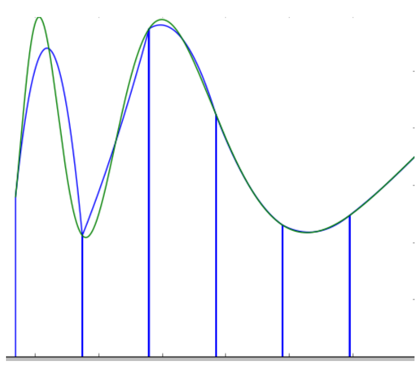
$$\forall\, k \in [\![\, 0, n-1 \,]\!],\ |I_k - T_{n,k}(f)| \leqslant M_2\,\frac{(b-a)^3}{12n^3}\ ; \qquad \text{puis que :} \quad |I - T_n(f)| \leqslant M_2\,\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

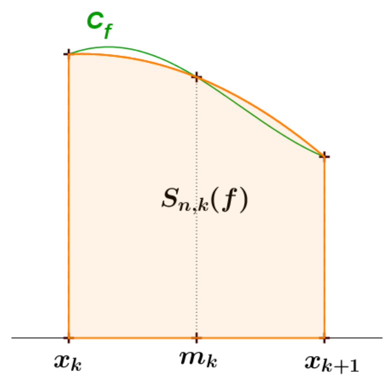
Partie III — Méthode de Simpson

Tout au long de la partie III, on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a, b]$.

Par ailleurs dans cette partie, on approche f sur chacun des segments $[x_k, x_{k+1}]$ par la fonction polynomiale P_k de degré au plus 2 coïncidant avec la fonction f en x_k, x_{k+1} et en m_k (avec $m_k = (x_k + x_{k+1})/2$).

On note $S_{n,k}(f)$ l'intégrale de P_k sur le segment $[x_k, x_{k+1}]$; et on note $S_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_{n,k}(f)$. Les figures ci-dessous illustrent cette construction.





7. Soient c et d deux réels quelconques de $[a, b]$, avec $c < d$; et $m = (c + d)/2$ le milieu du segment $[c, d]$. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$P(X) = \frac{f(c)}{(c-m)(c-d)}(X-m)(X-d) + \frac{f(m)}{(m-c)(m-d)}(X-c)(X-d) + \frac{f(d)}{(d-m)(d-c)}(X-c)(X-m)$$

On notera encore P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ associée à ce polynôme.

Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P(c) = f(c)$, $P(d) = f(d)$ et $P(m) = f(m)$.

Remarque : ceci établit l'existence et l'unicité du polynôme $P_k \in \mathbb{R}_2[X]$ évoqué dans le préambule de cette partie.

8. On conserve tout au long de cette question les notations de la précédente. On souhaite calculer l'intégrale de P sur $[c, d]$.†

a. A l'aide d'un changement de variable, établir que :

$$\int_c^d P(x)\,\mathrm{d}x = (d-c)\int_0^1 P((d-c)u + c)\,\mathrm{d}u$$

†. En évitant de très lourds calculs.

b. On note L_0, L_1 et $L_{1/2}$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels 0, 1 et 1/2. Explicitement :

$$L_0(X) = 2X^2 - 3X + 1\,; \qquad L_1(X) = 2X^2 - X\,; \qquad L_{1/2}(X) = 4X - 4X^2$$

On continuera de noter L_0, L_1 et $L_{1/2}$ les fonctions polynomiales associées à ces polynômes. [‡]

‡. On pourra observer que $L_0(0) = 1$, et que L_0 s'annule en $1/2$ et 1. En adaptant ce qui doit l'être, les mêmes propriétés sont satisfaites par les polynômes L_1 et $L_{1/2}$.

Etablir que :

$$\forall u \in [0,1]\,,\ P\left((d-c)\,u+c\right) = f(c)L_0(u) + f(d)L_1(u) + f(m)L_{1/2}(u)$$

c. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 L_0(u)\,\mathrm{d}u$, $\displaystyle\int_0^1 L_1(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^1 L_{1/2}(u)\,\mathrm{d}u$.

d. Déduire des questions précédentes que :

$$\int_c^d P(x)\,\mathrm{d}x = \frac{d-c}{6}\,\left(f(c)+4f(m)+f(d)\right)$$

A la lumière des calculs précédents, la méthode de Simpson consiste à approcher $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *par :*

$$\boxed{S_n(f) = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_k\right)+4f\left(m_k\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right) \quad \textit{où on a noté : } m_k = \frac{x_k+x_{k+1}}{2} \qquad (\star)}$$

Comme dans les deux premières parties, on cherche à majorer l'erreur $|I - S_n(f)|$.

9. Estimation de l'erreur. Jusqu'à la fin de cette question, c et d continuent de désigner deux réels quelconques de $[a,b]$, avec $c<d$. On rappelle par ailleurs que dans cette partie, la fonction f est supposée de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a,b]$ et à valeurs réelles.

On définit une fonction g sur $\left[0, \dfrac{d-c}{2}\right]$ en posant :

$$\forall t \in \left[0,\frac{d-c}{2}\right],\ g(t) = \int_{m-t}^{m+t} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{t}{3}\left(f\left(m-t\right)+4f(m)+f\left(m+t\right)\right) \qquad \text{où } m = \frac{c+d}{2}$$

a. Après avoir brièvement justifié que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^4$, calculer ses dérivées successives g', g'' et $g^{(3)}$. On vérifiera en particulier que :

$$\forall t \in \left[0,\frac{d-c}{2}\right], \quad g^{(3)}(t) = \frac{t}{3}\left(f^{(3)}\left(m-t\right) - f^{(3)}\left(m+t\right)\right)$$

b. Soit t un réel non nul de $\left[0,\dfrac{d-c}{2}\right]$. Etablir que : $\exists\,\alpha \in\ ]\,m-t, m+t\,[\,,\quad g^{(3)}(t) = -\dfrac{2t^2}{3}\,f^{(4)}\left(\alpha\right)$

c. D'après la question précédente, on a : $\forall\, t \in \left[0, \dfrac{d-c}{2}\right]$, $\quad \left|g^{(3)}(t)\right| \leqslant \dfrac{2M_4}{3}\, t^2$ où $M_4 = \sup\limits_{x \in [a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

En déduire successivement les majorations suivantes, valides pour tout réel $t \in \left[0, \dfrac{d-c}{2}\right]$:

☞ $\left|g^{(2)}(t)\right| \leqslant \dfrac{2M_4}{9}\, t^3$ ☞ $|g'(t)| \leqslant \dfrac{M_4}{18}\, t^4$ ☞ $|g(t)| \leqslant \dfrac{M_4}{90}\, t^5$

d. En déduire que : $|I - S_n(f)| \leqslant \dfrac{M_4\,(b-a)^5}{2880 n^4}$

Partie IV — Vers une généralisation : approximation polynomiale de degré arbitraire

L'objectif de cette partie est de donner une piste pour généraliser les méthodes précédentes, en montrant en particulier que toute fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un segment peut être "correctement approchée" par un polynôme de degré n dans un sens rendu plus précis par l'ultime question de ce problème.

Soit n un entier naturel non nul, et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ $(n+1)$ réels distincts du segment $[a,b]$.

On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $L_k = \displaystyle\prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{X-\alpha_j}{\alpha_k - \alpha_j}$.

10. Soit k un entier naturel arbitraire. Quel est le degré de L_k ?

11. Etablir que pour tout $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $\forall\, i \in [\![0, n]\!]$, $L_k(\alpha_i) = \delta_{ik}$.

12. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs réelles. On pose : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(\alpha_k)\, L_k$.

Montrer que P est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall\, i \in [\![0, n]\!]$, $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$.

13. On désire maintenant mesurer la qualité de l'approximation réalisée lorsque l'on approche la fonction f par le polynôme P défini ci-dessus. Pour cela, on suppose (jusqu'à la fin du problème) que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, et on pose par ailleurs :

$$\Pi_{n+1} = \prod_{i=0}^{n} (X - \alpha_i)$$

On veut prouver qu'il existe un réel $\beta \in [a,b]$ tel que : $f(x) - P(x) = \dfrac{\Pi_{n+1}(x)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\beta) \qquad (\star)$

a. Soit $x \in \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$. Etablir le résultat $(\star)$.

b. Soit à présent $x \in [a,b]$, $x \notin \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$. On introduit la fonction F définie par :

$$\forall\, t \in [a,b],\ F(t) = f(t) - P(t) - K\Pi_{n+1}(t)$$

avec K constante réelle choisie de sorte que : $F(x) = 0$.

Justifier l'existence de la constante K et observer que F possède au moins $(n+2)$ valeurs d'annulation distinctes. En déduire l'existence d'un réel $\beta \in [a,b]$ tel que : $F^{(n+1)}(\beta) = 0$. Conclure.

c. En déduire que : $\|f - P\| \leqslant \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\| \qquad$ (où l'on a noté : $\|g\| = \sup\limits_{x \in [a,b]} |g(x)|$)

Problème 2 — Endomorphismes dont le noyau et l'image sont supplémentaires

Problématique. *Lorsque f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on peut se demander à quelle(s) condition(s) les sous-espaces vectoriels* $\ker(f)$ *et $Im(f)$ sont supplémentaires dans E (càd $E = \ker(f) \bigoplus Im(f)$).*

L'objectif de ce problème est de donner une caractérisation des endomorphismes satisfaisant cette condition.

Notation. Tout au long de ce problème, on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie I — Deux exemples gentils pour démarrer

1. Dérivation polynomiale. Dans cette question, on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère l'endomorphisme Δ de E défini en posant : $\forall\, P \in \mathbb{K}[X],\ \Delta(P) = P'$.

- **a.** Déterminer le noyau et l'image de Δ.
- **b.** A t-on : $E = \ker(\Delta) \bigoplus \mathrm{Im}(\Delta)$?

2. Calcul matriciel. Dans cette question, on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (où n désigne un entier naturel $\geqslant 2$). On considère l'endomorphisme π de E défini en posant : $\forall\, A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),\ \pi(A) = \dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$.

- **a.** Déterminer le noyau et l'image de π (le résultat concernant l'image de π devra être très soigneusement justifié).
- **b.** A t-on : $E = \ker(\pi) \bigoplus \mathrm{Im}(\pi)$?

Partie II — Un exemple plus consistant

3. Résultat préliminaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. On considère deux sev H_1 et H_2 de E tels que :

$$\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1 \qquad \text{et} \qquad H_1 \neq H_2.$$

- **a.** Démontrer que $E = H_1 + H_2$.
- **b.** Déduire de la question précédente la dimension de $H_1 \cap H_2$.

4. Jusqu'à la fin de la partie II, on note $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour tout polynôme P de E, on pose :

$$f(P) = \frac{1}{2}\left(X^2 - 1\right) P'' - XP' + P$$

Montrer que f un endomorphisme de E.

5. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E. Ecrire la matrice $M = \mathrm{M}_{\mathscr{B}}(f)$ de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$ (on donnera le détail des calculs permettant de l'obtenir).

6. Montrer que f est un projecteur de E.

7. Montrer que $\ker(f)$ est un plan vectoriel de E dont on donnera une base.

8. **Détermination de l'image de f.** On considère la partie G de E suivante :

$$G = \{Q \in E \,/\, Q'(1) = Q'(-1) = 0\}$$

a. Etablir l'inclusion : $\mathrm{Im}(f) \subset G$.

b. On considère l'application linéaire $\varphi : E = \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P \longmapsto P'(1)$$

Etablir que φ est surjective.

c. En déduire la dimension de $\ker(\varphi)$.

d. Montrer que G est un sev de E, dont on déterminera la dimension.

e. Prouver que : $\mathrm{Im}(f) = G$. Préciser une base de $\mathrm{Im}(f)$.

9. Les sev $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$?

Partie III — Une condition suffisante...

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et que p est un projecteur de E.

10. Démontrer que $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

11. Enoncer précisément le théorème du rang.

12. Grâce à un raisonnement utilisant le théorème du rang (mais pas exclusivement), montrer que $E = \ker(p) \bigoplus \mathrm{Im}(p)$ lorsque E est de dimension finie.

13. Grâce à un raisonnement n'utilisant surtout pas le théorème du rang, montrer que $E = \ker(p) \bigoplus \mathrm{Im}(p)$ même si on ne fait plus l'hypothèse que E est de dimension finie.

Partie IV — ... mais pas nécessaire

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ défini en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \; f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3y \\ 3x - 3z \\ y \end{pmatrix}$$

14. Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$.

15. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

16. Etablir que : $\mathbb{R}^4 = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$.

17. L'endomorphisme f est-il un projecteur ?

Partie V — Une condition nécessaire et suffisante en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f désigne un endomorphisme de E.

L'objectif est d'établir que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i)	$E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$
(ii)	$\ker(f) = \ker\left(f^2\right)$
(iii)	$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$

18. Démontrer que $\ker(f) \subset \ker\left(f^2\right)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

19. En déduire que les assertions (ii) et (iii) sont équivalentes.

20. Démontrer que si $\ker(f) = \ker\left(f^2\right)$, alors $E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$.

21. Démontrer que si $E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$, alors $\ker(f) = \ker\left(f^2\right)$.

22. **Question bonus**. Donner un exemple prouvant que les assertions (i) et (iii) ne sont pas équivalentes lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie.