

DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES — 1ER JUIN 2017

Corrigé du Problème 1 — Méthodes d'intégration numériques

1) Preuve du théorème de Rolle.

THÉORÈME DE ROLLE. Soient c et d deux réels tels que $c < d$, et φ une fonction continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$. On suppose que $\varphi(c) = \varphi(d)$. Sous ces hypothèses :

$$\exists \alpha \in]c, d[, \varphi'(\alpha) = 0$$

La fonction φ étant continue sur le segment $[c, d]$, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[c, d]$ (théorème des bornes atteintes). Notons m son minimum et M son maximum.

► Si $m = M$: alors φ est constante sur $[c, d]$. Par suite : $\forall \alpha \in]c, d[, \varphi'(\alpha) = 0$.

► Si $m < M$: distinguons alors deux sous-cas : soit $\varphi(c) = m$, soit $\varphi(c) \neq m$.

➤ Si $\varphi(c) = m$: alors on a aussi $\varphi(d) = m$ (par hypothèse), donc le maximum M de φ est atteint en un réel α de $]c, d[$ (puisque $m \neq M$), et on a donc $\varphi'(\alpha) = 0$.

➤ Si $\varphi(c) \neq m$: alors on a aussi $\varphi(d) \neq m$ (par hypothèse), donc le minimum m de φ est atteint en un réel α de $]c, d[$, et on a donc $\varphi'(\alpha) = 0$.

Conclusion. Dans tous les cas : $\exists \alpha \in]c, d[, \varphi'(\alpha) = 0$.

Partie I — Méthode des rectangles médians

2) D'après la relation de Chasles pour les intégrales, on a : $I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$.

$$\text{Il s'ensuit déjà que : } I - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - R_{n,k}(f) \right].$$

Par ailleurs, pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, on a : $R_{n,k}(f) = h \times f(m_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(m_k) dx$.

On en déduit grâce à ($\spadesuit$) et par linéarité de l'intégrale que : $I - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(m_k)] dx$.

3) Estimation de l'erreur.

a) Avec la définition de l'énoncé, on a : $\Phi(c) = f(d) - f(c) - (d-c)f'(c) - A \frac{(d-c)^2}{2}$ et $\Phi(d) = 0$.

Par conséquent : $[\Phi(c) = \Phi(d) = 0] \iff \left[f(d) - f(c) - (d-c)f'(c) - A \frac{(d-c)^2}{2} = 0 \right] \iff$

$$\left[A = \frac{2}{(d-c)^2} (f(d) - f(c) - (d-c)f'(c)) \right].$$

Ce qui prouve l'existence et l'unicité du réel A tel que $\Phi(c) = \Phi(d) = 0$.

b) D'après les théorèmes généraux et l'hypothèse faite sur f , la fonction Φ est dérivable sur $]c, d[$ et continue sur $[c, d]$; on peut lui appliquer le théorème de Rolle pour affirmer : $\exists \alpha \in]c, d[, \Phi'(\alpha) = 0$.

Or pour tout réel $x \in]c, d[$ on a :

$$\Phi'(x) = -f'(x) - (d-x)f''(x) + f'(x) + A(d-x) = -(d-x)f''(x) + A(d-x)$$

Par suite : $\exists \alpha \in]c, d[, -(d-\alpha)f''(\alpha) + A(d-\alpha) = 0 \iff (d-\alpha)f''(\alpha) = A(d-\alpha) \iff A = f''(\alpha)$.*

Conclusion. $\exists \alpha \in]c, d[, A = f''(\alpha)$.

c) On déduit des deux questions précédentes qu'il existe un réel $\alpha \in]c, d[$ tel que :

$$\begin{aligned} f''(\alpha) = \frac{2}{(d-c)^2} (f(d) - f(c) - (d-c)f'(c)) &\iff f(d) - f(c) - (d-c)f'(c) = \frac{(d-c)^2}{2} f''(\alpha) \\ &\iff f(d) = f(c) + (d-c)f'(c) + \frac{(d-c)^2}{2} f''(\alpha) \end{aligned}$$

Conclusion. $\exists \alpha \in]c, d[, f(d) = f(c) + (d-c)f'(c) + \frac{(d-c)^2}{2} f''(\alpha)$.

d) La fonction f étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, sa dérivée seconde est continue sur $[a, b]$; à ce titre f'' est bornée sur $[a, b]$ d'après le théorème des bornes atteintes.

Par suite : $\exists M_2 \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [a, b], |f''(x)| \leq M_2$.

e) Soit k un entier quelconque compris entre 0 et $(n-1)$, et soit x un réel du segment $[x_k, x_{k+1}]$. D'après la question c), il existe un réel α compris entre m_k et x tel que :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(m_k) + (x - m_k)f'(m_k) + \frac{(x - m_k)^2}{2} f''(\alpha) \\ \text{d'où : } |f(x) - f(m_k) - (x - m_k)f'(m_k)| &= \frac{(x - m_k)^2}{2} |f''(\alpha)| \end{aligned}$$

On en déduit grâce à d) que : $|f(x) - f(m_k) - (x - m_k)f'(m_k)| \leq M_2 \frac{(x - m_k)^2}{2}$.

L'entier k et le réel x étant arbitraires dans ce qui précède, on peut conclure :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in [m_k, m_{k+1}], |f(x) - f(m_k) - (x - m_k)f'(m_k)| \leq M_2 \frac{(x - m_k)^2}{2}$$

f) Soit k un entier quelconque compris entre 0 et $(n-1)$, et soit x un réel du segment $[x_k, x_{k+1}]$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale entre m_k et x , on obtient :

$$f(x) = f(m_k) + (x - m_k)f'(m_k) + \int_{m_k}^x (x-t)f''(t)dt \quad (\spadesuit)$$

Puisque la fonction f'' est continue entre m_k et x , elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe donc deux valeurs m et M de f'' telles que : $m \leq f \leq M$.

*. La dernière équivalence provenant de ce que $(d-\alpha) \neq 0$, puisque $\alpha \in]c, d[$.

Dans le cas où $x \geq m_k$, on en déduit que : $m \int_{m_k}^x (x-t) dt \leq \int_{m_k}^x (x-t) f''(t) dt \leq M \int_{m_k}^x (x-t) dt$

$$\text{D'où : } m \frac{(x-m_k)^2}{2} \leq \int_{m_k}^x (x-t) f''(t) dt \leq M \frac{(x-m_k)^2}{2}$$

$$\text{D'où : } m \leq \frac{2}{(x-m_k)^2} \int_{m_k}^x (x-t) f''(t) dt \leq M$$

Ainsi, le terme du milieu de cet encadrement apparaît comme une valeur intermédiaire de la fonction f'' , et on peut donc affirmer qu'il existe un réel α compris entre m_k et x tel que :

$$f''(\alpha) = \frac{2}{(x-m_k)^2} \int_{m_k}^x (x-t) f''(t) dt \text{ d'où : } \int_{m_k}^x (x-t) f''(t) dt = \frac{(x-m_k)^2}{2} f''(\alpha) \quad (\clubsuit)$$

On déduit de () et de () que : $f(x) = f(m_k) + (x-m_k)f'(m_k) + \frac{(x-m_k)^2}{2} f''(\alpha)$.

Dans le cas où $x < m_k$, le même raisonnement donne la même conclusion (il suffit de changer les signes des inégalités du premier encadrement de cette page).

g) Soit k un entier quelconque compris entre 0 et $(n-1)$.

► Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) - (x-m_k)f'(m_k) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-m_k)f'(m_k) dx$$

$$\text{Or}^\dagger : \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-m_k)f'(m_k) dx = 0.$$

$$\text{Par suite : } \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) - (x-m_k)f'(m_k) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) dx \quad (\spadesuit)$$

$$\text{► Par ailleurs : } \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) - (x-m_k)f'(m_k) dx \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(m_k) - (x-m_k)f'(m_k)| dx$$

D'après la question e) on a alors :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) - (x-m_k)f'(m_k) dx \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} M_2 \frac{(x-m_k)^2}{2} dx$$

Il reste à observer que :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} M_2 \frac{(x-m_k)^2}{2} dx = \frac{M_2}{6} [(x-m_k)^3]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{M_2}{6} \times 2 \times \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{M_2}{24} h^3$$

$$\text{pour obtenir : } \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) - (x-m_k)f'(m_k) dx \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^3} \quad (\clubsuit).$$

On déduit alors de () et de () que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - f(m_k) dx \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^3}$.

[†]. Par un calcul sans difficulté ou par un argument géométrique évident.

D'après la question 2 : $I - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - f(m_k)] dx$. Grâce au résultat que l'on vient

d'établir et à l'inégalité triangulaire, on en déduit : $|I - R_n(f)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^3}$.

D'où finalement : $|I - R_n(f)| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2}$.

4) a) La fonction `rectangles(f,a,b,n)` ci-dessous reçoit comme paramètres deux réels a et b , une fonction f et un entier naturel non nul n , et retourne la valeur de $R_n(f)$.

```

1  def rectangles(f,a,b,n):
2      S = 0
3      h = (b - a) / n
4      for k in range(n):
5          S = S + h * f(a + (h / 2) + k * h)
6      return S

```

b) La fonction `rectangles_v2(f,a,b,M_2,eps)` ci-dessous reçoit comme paramètres deux réels a et b , une fonction f , un réel M_2 (un majorant de $|f''|$ sur $[a, b]$), et un réel ϵ , et retourne une valeur de $R_n(f)$ approchant $\int_a^b f$ avec une erreur inférieure ou égale à ϵ .

```

1  def rectangles_v2(f,a,b,M_2,eps):
2      S = 0
3      n = 1
4      while (M_2 * (b - a)**3 / (24 * n**2)) > eps:
5          n = n + 1
6      return rectangles(f,a,b,n)

```

Partie II — Méthode des trapèzes

5) La réponse à cette question repose essentiellement sur la formule donnant l'aire d'un trapèze... Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ on a : $T_{n,k}(f) = h \times \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$.

$$\text{D'où : } T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} h \times \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})]$$

$$\text{C'est à dire : } T_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})].$$

6) En utilisant la relation de Chasles pour les intégrales, on peut déjà écrire :

$$\int_a^b f(x) dx - T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} T_{n,k}(f).$$

Or par définition de g_k , on a : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $T_{n,k}(f) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x) dx$.

$$\text{Grâce à ces observations et par linéarité de l'intégrale : } \int_a^b f(x) dx - T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) - g_k(x) dx.$$

7) **Estimation de l'erreur.** Soit k un entier compris entre 0 et $(n-1)$.

a) La fonction δ'_k et la fonction qui à tout réel x du segment $[x_k, x_{k+1}]$ associe $(x-x_k)(x-x_{k+1})$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, ce qui rend légitime l'intégration par parties suivante :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta''_k(x) (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx = \underbrace{[\delta'_k(x)(x-x_k)(x-x_{k+1}))]_{x_k}^{x_{k+1}}}_{=0} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta'_k(x) (2x-x_k-x_{k+1}) dx$$

La fonction δ_k et la fonction qui à tout réel x du segment $[x_k, x_{k+1}]$ associe $2x-x_k-x_{k+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_k, x_{k+1}]$, ce qui rend légitime la seconde intégration par parties suivante :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta''_k(x) (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx = \underbrace{[\delta_k(x)(2x-x_k-x_{k+1}))]_{x_k}^{x_{k+1}}}_{=0} + 2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta_k(x) dx$$

$$\textbf{Conclusion.} \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta_k(x) dx = \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta''_k(x) (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx.$$

b) Soit k un entier quelconque compris entre 0 et $(n-1)$. D'après la question précédente, et par définition de δ_k on a :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta_k(x) dx = \frac{1}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta''_k(x) (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx$$

Observons alors que pour tout réel $x \in [x_k, x_{k+1}]$, on a : $\delta''_k(x) = f''(x)$, puisque g_k est affine (et qu'elle a à ce titre une dérivée seconde identiquement nulle). Par suite :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta_k(x) dx \right| \leq \frac{M_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |(x-x_k)(x-x_{k+1})| dx = -\frac{M_2}{2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx \quad (\spadesuit)$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x-x_k)(x-x_{k+1}) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x_k+x_{k+1}}{2} x^2 + x_k x_{k+1} x \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= \frac{1}{6} (2x_{k+1}^3 - 3x_k x_{k+1}^2 - 3x_{k+1}^3 + 6x_k x_{k+1}^2 - 2x_k^3 + 3x_k^3 + 3x_k^2 x_{k+1} - 6x_k^2 x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{6} (x_k^3 - 3x_k^2 x_{k+1} + 3x_k x_{k+1}^2 - x_{k+1}^3) = \frac{1}{6} (x_k - x_{k+1})^3 = -\frac{h^3}{6} \quad (\clubsuit) \end{aligned}$$

$$\text{D'après } (\spadesuit) \text{ et } (\clubsuit) : \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \delta_k(x) dx \right| \leq M_2 \frac{h^3}{12}$$

$$\text{Autrement écrit : } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x) - g_k(x)] dx \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^3}$$

On déduit de ce résultat, de la question 6 et de l'inégalité triangulaire que :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^3} \quad \text{d'où : } \boxed{|I - T_n(f)| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}}.$$

Partie III — Méthode de Simpson

8) Le polynôme P est de degré au plus 2 (trivial), et il coïncide avec f en c , m et d (c'est une vérification immédiate). Puisque les réels c , m et d sont distincts, le principe du prolongement algébrique assure l'unicité d'un polynôme P vérifiant ces conditions.

$$\textbf{Conclusion.} \quad \exists ! P \in \mathbb{R}_2[X], \quad P(c) = f(c), \quad P(d) = f(d), \quad P(m) = f(m).$$

9) a) Le très mystérieux changement de variable suggéré dans l'énoncé consiste à poser : $x = (d-c)u+c$. Ainsi : $dx = (d-c) du$ et il reste à observer que u prend la valeur 0 (*resp.* 1) lorsque x prend la valeur c (*resp.* d) pour obtenir :

$$\int_c^d P(x) dx = (d-c) \int_0^1 P((d-c)u+c) du.$$

b) Notons $Q = f(c)L_0(u) + f(d)L_1(u) + f(m)L_{1/2}(u)$. Le polynôme Q est de degré au plus 2, en tant que combinaison linéaire des polynômes de Lagrange (qui sont dans $\mathbb{R}_2[X]$). De plus : $Q(0) = f(c)$, $Q(1/2) = f(m)$ et $Q(1) = f(d)$.

D'autre part, la fonction $u \mapsto P((d-c)u+c)$ est elle aussi polynomiale de degré au plus 2, et vérifie : $P(c) = f(c)$, $P(m) = f(m)$ et $P(d) = f(d)$.

On en déduit que P et Q sont deux fonctions polynomiales de degré au plus 2, telles que : $P(0) = Q(0)$, $P(1/2) = Q(1/2)$ et $P(1) = Q(1)$. D'après le principe du prolongement algébrique, elles sont égales.

Conclusion. $\forall u \in [0, 1], P((d-c)u+c) = f(c)L_0(u) + f(d)L_1(u) + f(m)L_{1/2}(u)$.

c) On a : $\int_0^1 L_0(u) du = \int_0^1 2u^2 - 3u + 1 = \frac{1}{6} [4x^3 - 9x^2 + 6x]_0^1$ d'où : $\int_0^1 L_0(u) du = \frac{1}{6}$

On a : $\int_0^1 L_1(u) du = \int_0^1 2u^2 - u = \frac{1}{6} [4x^3 - 3x^2]_0^1$ d'où : $\int_0^1 L_1(u) du = \frac{1}{6}$

Enfin : $\int_0^1 L_{1/2}(u) du = \int_0^1 4u - 4u^2 = \frac{1}{6} [12x^2 - 8x^3]_0^1$ d'où : $\int_0^1 L_{1/2}(u) du = \frac{4}{6}$

d) D'après la question 9-a : $\int_c^d P(x) dx = (d-c) \int_0^1 P((d-c)u+c) du$

On en déduit grâce à la question 9-b : $\int_c^d P(x) dx = (d-c) \int_0^1 f(c)L_0(u) + f(d)L_1(u) + f(m)L_{1/2}(u) du$

D'où, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_c^d P(x) dx = (d-c) \left[f(c) \int_0^1 L_0(u) du + f(d) \int_0^1 L_1(u) du + f(m) \int_0^1 L_{1/2}(u) du \right]$$

Enfin, d'après la question précédente : $\int_c^d P(x) dx = (d-c) \left[f(c) \times \frac{1}{6} + f(d) \times \frac{1}{6} + f(m) \times \frac{4}{6} \right]$

C'est à dire : $\int_c^d P(x) dx = \frac{d-c}{6} (f(c) + 4f(m) + f(d))$.

10) **Estimation de l'erreur.** a) Notons F une primitive de f sur $[c, d]$ (l'existence de F est assurée par la continuité de f sur $[c, d]$). On a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \int_{m-t}^{m+t} f(t) dt = F(m+t) - F(m-t)$$

En particulier, la fonction $t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right] \mapsto \int_{m-t}^{m+t} f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^4$ (et même $\mathcal{C}^5$) sur $\left[0, \frac{d-c}{2}\right]$.

Cette observation faite, les théorèmes généraux et l'hypothèse selon laquelle f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$ impliquent que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $\left[0, \frac{d-c}{2}\right]$. Il est alors légitime de calculer ses dérivées successives pour obtenir :

$$\forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \quad g'(t) = f(m+t) + f(m-t) - \frac{1}{3}(f(m-t) + 4f(m) + f(m+t)) \\ - \frac{t}{3}(-f'(m-t) + f'(m+t))$$

$$\iff \forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \quad g'(t) = \frac{2}{3}f(m+t) + \frac{2}{3}f(m-t) - \frac{4}{3}f(m) - \frac{t}{3}(-f'(m-t) + f'(m+t))$$

$$\implies \forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \quad g''(t) = \frac{2}{3}f'(m+t) - \frac{2}{3}f'(m-t) - \frac{t}{3}(f''(m-t) + f''(m+t)) \\ - \frac{1}{3}(-f'(m-t) + f'(m+t))$$

$$\iff \forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \quad g''(t) = \frac{1}{3}f'(m+t) - \frac{1}{3}f'(m-t) - \frac{t}{3}(f''(m-t) + f''(m+t))$$

$$\implies \forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \quad g^{(3)}(t) = \frac{1}{3}f''(m+t) + \frac{1}{3}f''(m-t) - \frac{t}{3}(-f^{(3)}(m-t) - f^{(3)}(m+t)) \\ - \frac{1}{3}f''(m-t) - \frac{1}{3}f''(m+t)$$

Par suite : $\forall t \in \left[0, \frac{d-c}{2}\right], \quad g^{(3)}(t) = \frac{t}{3}(f^{(3)}(m-t) - f^{(3)}(m+t))$

b) Soit t un réel strictement positif dans $\left[0, \frac{d-c}{2}\right]$. La fonction $f^{(3)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[m-t, m+t]$, puisque $[m-t, m+t] \subset [c, d] \subset [a, b]$ et que f est supposée de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a, b]$.

On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $f^{(3)}$ sur $[m-t, m+t]$ pour affirmer :

$$\exists \alpha \in]m-t, m+t[, \quad f^{(3)}(m+t) - f^{(3)}(m-t) = 2tf^{(4)}(\alpha)$$

On déduit de cette relation et de celle établie dans la question précédente que :

$$\exists \alpha \in]m-t, m+t[, \quad g^{(3)}(t) = \frac{t}{3} \times (-2tf^{(4)}(\alpha)) = -\frac{2t^2}{3}f^{(4)}(\alpha)$$

Conclusion. $\exists \alpha \in]m-t, m+t[, \quad g^{(3)}(t) = -\frac{2t^2}{3}f^{(4)}(\alpha)$

c) Tout au long de cette question, t désigne un réel de $\left[0, \frac{d-c}{2}\right]$.

On a : $g^{(2)}(t) = \int_0^t g^{(3)}(u) du + g^{(2)}(0)$

Or $g^{(2)}(0) = 0$ (d'après 10-a). D'où : $|g^{(2)}(u)| = \left| \int_0^t g^{(3)}(u) du \right| \leq \int_0^t |g^{(3)}(u)| du$

D'après la question précédente : $|g^{(2)}(t)| \leq \frac{2M_4}{3} \int_0^t u^2 du$ c'est à dire : $|g^{(2)}(t)| \leq \frac{2M_4}{9} t^3$

On réitère le processus avec g' . On a : $g'(t) = \int_0^t g^{(2)}(u) du + g'(0)$

Or $g'(0) = 0$ (d'après 10-a). D'où : $|g'(u)| = \left| \int_0^t g^{(2)}(u) du \right| \leq \int_0^t |g^{(2)}(u)| du$

D'après ce qui précède : $|g'(t)| \leq \frac{2M_4}{9} \int_0^t u^3 du$ c'est à dire : $|g'(t)| \leq \frac{M_4}{18} t^4$

On ne change pas de méthode, et on réitère le processus avec g . On a : $g(t) = \int_0^t g'(u) du + g(0)$

Or $g(0) = 0$ (par définition même). D'où : $|g(u)| = \left| \int_0^t g'(u) du \right| \leq \int_0^t |g'(u)| du$

D'après ce qui précède : $|g(t)| \leq \frac{M_4}{18} \int_0^t u^4 du$ c'est à dire : $|g(t)| \leq \frac{M_4}{90} t^5$

d) Soit k un entier compris entre 0 et $n - 1$. On commence par observer que d'après la question précédente[‡] :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{h}{6} (f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})) \right| \leq \frac{M_4}{90} \left(\frac{h}{2} \right)^5$$

$$\text{D'où : } \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx - \frac{b-a}{6n} (f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})) \right| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{2880n^5}$$

On en déduit, grâce à la définition de $S_n(f)$ et par le biais d'une ultime application de l'inégalité triangulaire que :

$$|I - S_n(f)| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{2880n^4}$$

[‡]. On applique le résultat de la question 10.c, en prenant $c = x_k$ et $d = x_{k+1}$ (de telle sorte que $d - c = h$) et $t = h/2$.