CONCOURS BLANC JUIN 2022

Mathématiques 2

Durée : 2 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Ecrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices indépendants.

Exercice 1 — (Analyse).

1. Rappeler sans démonstration le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. En déduire le développement limité à l'ordre 7 en 0 de $x \longmapsto \arctan(x)$.

Soient $f, g :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ telles que $f(0) = g(0) = 0$.

On pose : $h = f \circ g$ et $H = f \circ g - g \circ f$.

4. Montrer que les fonctions h et H sont bien définies sur un voisinage de l'origine.

5. Exprimer les dérivées h', h'' et h''' en fonction de celles de f et de g.

6. On suppose dorénavant que f et g sont impaires, avec : $f'(0) = g'(0) = 1$.

Montrer que $H(x) = O(x^5)$ au voisinage de 0. [*]

7. En continuant le développement de H, montrer que : $H(x) = O(x^7)$. [†]

8. On admet la formule suivante (qui tient compte des hypothèses faites plus haut) pour la dérivée 7ème de h :

$$h^{(7)}(0) = g^{(7)}(0) + 21 g^{(5)}(0) f^{(3)}(0) + 70 g^{(3)}(0)^2 f^{(3)}(0) + 35 g^{(3)}(0) f^{(5)}(0) + f^{(7)}(0)$$

Déterminer le développement limité à l'ordre 7 en 0 de H en 0.

9. En déduire que :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arctan(\sin(x)) - \sin(\arctan(x))}{x^7} = -\frac{1}{30}$$

∗. Il s'agit de prouver que la partie régulière du DL à l'ordre 4 en 0 de H est nulle. Autrement dit, on doit prouver qu'au voisinage de 0, on a $H(x) = \lambda x^5 + o(x^5)$ (avec λ un certain réel).

†. Attention : c'est une question très calculatoire.

Exercice 2 — (Arithmétique et probabilités).

Notations et rappels de terminologie. On appelle espace probabilisé (Ω, P) la donnée d'un ensemble Ω (appelé univers) et d'une probabilité P sur $\mathscr{P}(\Omega)$. Les éléments de Ω sont appelés issues, et les parties de Ω évènements.

Un évènement A étant donné, on note $\Omega \backslash A$ (plutôt que $\overline{A}$) l'évènement contraire de A.

Deux évènements A et B sont dits indépendants lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Cette définition admet la généralisation suivante.

> Définition. Soit n un entier $\geqslant 2$, et soit $A_1, \ldots, A_n$ une famille de n évènements.
> Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour tout entier j compris entre 2 et n, et pour toute famille d'indices deux à deux distincts $i_1, \ldots, i_j$ dans $[\![1, n]\!]$ on a :
> $$P\left(\bigcap_{k=1}^{j} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{j} P(A_{i_k})$$

Partie I — Indicatrice d'Euler

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\phi(n)$ le nombre d'entiers naturels inférieurs à n qui sont premiers avec n. On définit ainsi une application $\phi : \mathbb{N} \backslash \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{N}^*$, appelée **indicatrice d'Euler**.

Par exemple : $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$.

On notera $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. En justifiant brièvement vos réponses, donner les valeurs de $\phi(5)$, $\phi(9)$ et $\phi(12)$. ‡

2. Soit $p \in \mathscr{P}$.

a. Etablir que $\phi(p) = p - 1$.

b. Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Soit n un entier naturel. Montrer que : $[n \wedge p = 1] \Longleftrightarrow [n \wedge p^\alpha = 1]$.

c. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

Partie II — Probabilités

Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

3. Soient A et B deux évènements (deux parties de Ω).

a. Etablir que : $A \cap (\Omega \backslash B) = A \backslash (A \cap B)$.

b. Etablir que A et B sont indépendants si et seulement si A et $\Omega \backslash B$ sont indépendants.

c. En déduire que A et B sont indépendants si et seulement si $\Omega \backslash A$ et $\Omega \backslash B$ sont indépendants.

‡. Après calculs et justifications, vous pourrez vérifier la justesse de vos résultats en constatant que $\phi(12) = \phi(3) \times \phi(4)$, et que $\phi(9) \neq \phi(3) \times \phi(3)$.

4. Soit $(A_i)_{i\in [\![1,n]\!]}$ une famille de n évènements (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$) mutuellement indépendants.

a. Etablir que les évènements $\Omega\backslash A_1,\ A_2,\dots,\ A_n$ sont mutuellement indépendants.

b. En déduire que les évènements $\Omega\backslash A_1, \Omega\backslash A_2, \dots, \Omega\backslash A_n$ sont mutuellement indépendants.

Partie III — Indicatrice d'Euler et probabilités

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On choisit de manière équiprobable un entier compris entre 1 et n.
Soient p un diviseur positif de n, et A_p l'évènement : "l'entier choisi est divisible par p".

5. Calculer $P\left(A_p\right)$.

6. On note $p_1,\dots,\ p_r$ les diviseurs premiers de n.

a. Soit m un entier naturel. Etablir que $[\forall\, i \in [\![\, 1, r\,]\!],\ p_i|m\ ] \Longleftrightarrow \left[\left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right)|m\ \right]$

b. Etablir que les évènements $A_{p_1},\dots,\ A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

7. On note désormais A l'évènement "l'entier choisi est premier avec n".

Calculer $P(A)$, et en déduire que : $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^{r}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right)$

8. Dans cette ultime question, n et m désignent deux entiers $\geqslant 2$.

Etablir que : $[n \wedge m = 1] \Longrightarrow [\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)]$