Exercices 26 - Séries numériques - Corrigé

Exercice 1. — **(Divergence grossière)** Montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ est grossièrement divergente.

Par croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = +\infty$. **Conclusion.** La série $\sum \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ diverge grossièrement.

Exercice 2. — **(Critère de comparaison)** Montrer que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

On a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$ (limite de référence). Donc la série ne diverge pas grossièrement.

En revanche, pour n suffisamment grand : $\frac{1}{\ln(n)} \geqslant \frac{1}{n}$. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison, la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente.

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

Exercice 3. — **(Critère des équivalents)** Montrer que la série $\sum n \arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)$ est convergente.

Notons $u_n = \arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)$. A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$.

De plus : $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^4}$. Puisque la série $\sum \frac{1}{n^4}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$), le critère des équivalents (pour les séries à termes positifs) permet de conclure.

Conclusion. La série $\sum n \arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)$ est convergente.

Exercice 4. — **(Critère de négligeabilité)** Montrer que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente, en justifiant que : $\frac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Notons $u_n = \sum \frac{\ln(n)}{n^3}$. A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$.

On a : $n^2 u_n = \sum \frac{\ln(n)}{n}$. Par croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 0$. Donc : $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$), le critère de négligeabilité (pour les séries à termes positifs) permet de conclure.

Conclusion. La série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente.

Exercice 5. — **(Règle de Riemann)** Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ est convergente, en justifiant que pour tout réel $1 < \beta < \alpha$, on a : $\lim\limits_{+\infty} n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

Notons $u_n = \sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$. A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$.

Soit β un réel tel que : $1 < \beta < \alpha$.

On a : $n^\beta u_n = \sum \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}}$. Puisque $\alpha - \beta > 0$, et par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta u_n = 0$. Donc : $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Puisque la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ est convergente (série de Riemann, $\beta > 1$), le critère de négligeabilité (pour les séries à termes positifs) permet de conclure.

Conclusion. Pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ est convergente.

Exercice 6. — **(Comparaison série-intégrale)** Soit f définie par : $\forall x \geqslant 2,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$.

1) Etudier le sens de variation de f sur $[2, +\infty[$.

2) Pour tout réel $A \geqslant 2$, calculer : $I(A) = \int_2^A \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

3) En déduire la nature de $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

Voir cours, pour les trois questions. La fonction f est positive, continue et décroissante (au voisinage de $+\infty$).

De plus, pour tout réel $A \geqslant 2$: $I(A) = \int_2^A \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln(x))]_2^A = \ln(\ln(A)) - \ln(\ln(2))$.

Par suite : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = +\infty$. Donc l'intégrale est divergente.

Les hypothèses permettent d'appliquer le critère de comparaison série-intégrale pour conclure.

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.

Exercice 7. — **(Somme d'une série géométrique)** Montrer que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

La série $\sum \frac{1}{2^n}$ est une série géométrique de raison $q = 1/2$.

Puisque $|q| < 1$, c'est une série convergente, de somme : $\frac{1}{1-q} = 2$.

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente et : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

EXERCICE 8. — **(Somme d'une série télescopique)** Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^3-n}$

Fait en classe. **Conclusion.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3-n}=\frac{1}{4}$

➤ **ET MAINTENANT, À VOUS DE JOUER !**

➤ **Les applications directes du cours**

EXERCICE 9. — Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont :

1/ $u_n=\dfrac{n^{3/2}}{n+1}$

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. **Conclusion.** La série $\displaystyle\sum\frac{n^{3/2}}{n+1}$ est grossièrement divergente.

2/ $u_n=\dfrac{1}{n^2-1}$ (et calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}u_n$)

A partir d'un certain rang : $u_n\geqslant 0$.

De plus : $u_n\sim_{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Puisque la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha>1$), le critère des équivalents (pour les séries à termes positifs) permet d'affirmer que la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2-1}$ est convergente.

Calculons sa somme. Soit N un entier $\geqslant 2$. Par le biais d'une décomposition en éléments simples trivialissime, on obtient :

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right]$$

Via une réécriture diabolique :

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right]+\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{N}+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}$$

Finalement :

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}\right).\qquad \text{Par suite : }\lim_{n\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$$

Conclusion. La série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2-1}$ est convergente et : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1}=\frac{3}{4}$.

3/ $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ (et calculer $\sum_{n\geqslant 2} u_n$)

A partir d'un certain rang : $u_n \leqslant 0$. Ce n'est pas grave : les résultats valides pour les séries à termes réels positifs restent valides pour les séries à termes réels négatifs. L'important est que u_n soit de signe constant à partir d'un certain rang. Cette affirmation est justifiée par la linéarité de la convergence, et plus précisément par le fait que $\sum u_n$ converge SSI $\sum (-u_n)$ converge.

De plus : $u_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{n^2}$. Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$), le critère des équivalents (pour les séries à termes de signe constant) permet d'affirmer que la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Calculons sa somme. Soit N un entier $\geqslant 2$. On a :

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{N} [\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln(n)]$$

Via une réécriture diabolique :

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\sum_{n=2}^{N} [\ln(n-1) - \ln(n)]\right) + \left(\sum_{n=2}^{N} [\ln(n+1) - \ln(n)]\right) = -\ln(N) + \ln(N+1) - \ln(2)$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{N+1}{2N}\right). \qquad \text{Par suite : } \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Conclusion. La série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente et : $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$.

4/ $u_n = \frac{1}{n\sin^2 n}$

Puisque $0 \leqslant \sin^2 n \leqslant 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Le critère de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure.

Conclusion. La série $\frac{1}{n\sin^2 n}$ est divergente.

5/ $u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$ (c'est un petit exo rigolo).

De plus, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+1/n)} = \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Par conséquent : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}$

On en déduit que :

$$u_n = \mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \mathrm{e}\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

En particulier : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

Puisque la série $\sum \dfrac{1}{n}$ est divergente (série de Riemann avec $\alpha \leqslant 1$), la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$ est également divergente[*], et le critère des équivalents (pour les séries à termes positifs) permet de conclure.

Conclusion. La série $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ est divergente.

6/ $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}\,(2022n)}{\mathrm{ch}\,(2023n)}$

A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$.

De plus, pour tout entier naturel n on a :

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{2022n}+\mathrm{e}^{-2022n}}{\mathrm{e}^{2023n}-\mathrm{e}^{-2023n}} \qquad \text{D'où : } u_n \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2022n}}{\mathrm{e}^{2023n}}.\ \text{Donc : } u_n \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{-n}$$

Puisque la série $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est convergente (c'est une série géométrique de raison $q=\mathrm{e}^{-1}$, d'où $|q|<1$), le critère des équivalents pour les séries à termes positifs permet de conclure.

Conclusion. La série $\dfrac{\mathrm{ch}\,(2022n)}{\mathrm{ch}\,(2023n)}$ est convergente.

Exercice 10. — Pour tout réel $x \in]-1,1[$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$.

C'est une série géométrique de raison $q=-x$. Par hypothèse $|q|<1$, donc la série est convergente et sa somme est donnée par la formule du cours.

Conclusion. Pour tout réel $x \in]-1,1[$, la série $\sum(-1)^n x^n$ est convergente et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$.

Exercice 11. — Soit α un réel. Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum n^\alpha\left[\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n^2}\right]$.

Notons : $u_n = n^\alpha\left[\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n^2}\right]$. A partir d'un certain rang : $u_n \leqslant 0$. Ce n'est pas grave[†]...

En outre, pour tout réel x on a :

$$\sin(x) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4) \qquad \text{d'où} \qquad \sin^2(x) = x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)$$

∗. On ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un scalaire non nul.

†. Cf exo 9 question 3.

Par conséquent :

$$\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{3n^4} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = -\frac{1}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On en déduit que : $u_n \sim_{+\infty} -\dfrac{1}{3n^{4-\alpha}}$.

Or la série $\sum \dfrac{1}{n^{4-\alpha}}$ est convergente si et seulement si : $4-\alpha > 1$, càd si et seulement si : $\alpha < 3$.

Le critère des équivalents (pour les séries à termes de signe constant) permet de conclure.

Conclusion. La série $\sum n^\alpha \left[\sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n^2}\right]$ converge si et seulement si $\alpha < 3$.

EXERCICE 12. — Quelle est la nature de la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \left[\tan^2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\right]$?

Notons : $u_n = n^2 \left[\tan^2\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n^2}\right]$. A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$.

En outre, pour tout réel x on a :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \text{d'où} \qquad \tan^2(x) = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$$

Par conséquent :

$$\tan^2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{2}{3n^4} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{2}{3n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

On en déduit que : $u_n \sim_{+\infty} -\dfrac{2}{3n^2}$.

Or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$).

Le critère des équivalents (pour les séries à termes positifs) permet de conclure.

Conclusion. La série $\sum n^2 \left[\tan^2\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n^2}\right]$ est convergente.

EXERCICE 13. — Justifier la convergence, puis calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$

A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$, et $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

La série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ est convergente (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$).

On en déduit, avec le critère des équivalents, que : **la série de TG** $\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}$ **est convergente**.

Pour calculer sa somme, on effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]$$

Ce que l'on réécrit :

$$\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

Par double télescopage etc...

Conclusion. La série de TG $\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}$ est convergente, et : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{4}$

Exercice 14. — On pose : $u_n(x)=(-1)^{n+1}\,x^{2n+2}\ln(x)$.

Pour tout réel x de $]\,0;1\,[$, montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$.

Soit x comme dans l'énoncé. La série de terme $\sum(-1)^{n+1}\,x^{2n+2}$ est une série géométrique de raison $q=\left(-x^2\right)$, d'où $|q|<1$ (par hypothèse). Il s'agit donc d'une série convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,x^{2n+2}=-x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,x^{2n}=-\frac{x^2}{1+x^2}$$

Conclusion. Pour tout réel x de $]\,0;1\,[$, la série $\sum u_n(x)$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\,x^{2n+2}\ln(x)=-\frac{x^2\ln(x)}{1+x^2}$$

Exercice 15. — En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, établir que pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ converge et calculer sa somme (complément du chapitre 23).

Soit $n\in\mathbb{N}$. En appliquant la formule TRI à la fonction exponentielle (de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et x, on obtient :

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^x(x-t)^n\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

Or : $\displaystyle 0\leqslant\int_0^x(x-t)^n\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^x\int_0^x(x-t)^n\mathrm{d}t\leqslant\mathrm{e}^x\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Par suite : $\displaystyle\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\leqslant\mathrm{e}^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Puisque : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^x\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\mathrm{e}^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|$.

Conclusion. Pour tout réel x, la série de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ est convergente, et :

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Exercice 16. — En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, établir que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (complément du chapitre 23).

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule TRI à la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ (de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$) entre 0 et 1, on obtient :

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

Or : $\displaystyle\left|\int_0^1 (1-t)^n \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant n!\int_0^x (1-t)^n\mathrm{d}t \leqslant \frac{n!}{n+1}$.

Par suite : $\displaystyle\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Conclusion. La série de terme général $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente, et :

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Exercice 17. — Soit x un réel tel que : $0 \leqslant x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. Montrer que la série $\displaystyle\sum\frac{x^n \mathrm{sh}(n)}{n(n+1)}$ est convergente.

Notons $u_n = \displaystyle\sum\frac{x^n \mathrm{sh}(n)}{n(n+1)}$. A partir d'un certain rang : $u_n \geqslant 0$.

De plus : $0 \leqslant x^n\mathrm{sh}(n) < 1$ puisque par hypothèse on a $0 < x^n < \mathrm{e}^{-n}$, et que $\mathrm{sh}(n) < \mathrm{e}^n$.

Il s'ensuit que : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Or la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, son terme général étant clairement équivalent à celui d'une série de Riemann convergente.

Le critère de comparaison (pour les séries à termes positifs) permet de conclure.

Conclusion. Pour tout réel x tel que $0 \leqslant x < \mathrm{e}^{-1}$, la série $\displaystyle\sum\frac{x^n \mathrm{sh}(n)}{n(n+1)}$ est convergente.

Exercice 18. — Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{\cos(n\theta)}{n^2}$ (avec θ réel quelconque).

Posons : $u_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{n^2}$. On a : $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\displaystyle\sum\frac{1}{n^2}$ étant convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$), on en déduit que la série $\sum|u_n|$ est convergente (critère de comparaison pour les séries à termes positifs).

En d'autres termes, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion. Pour tout réel θ, la série $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n^2}$ est convergente.

EXERCICE 19. — Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\arctan(2n+1)}{\pi n^{3/2}} e^{in\theta}$ (avec θ réel quelconque).

Posons : $u_n = \dfrac{\arctan(2n+1)}{\pi n^{3/2}} e^{in\theta}$.

On a :

$$|u_n| = \frac{\arctan(2n+1)}{\pi n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

La série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ étant convergente (série de Riemann avec $\alpha > 1$), on en déduit que la série $\sum |u_n|$ est convergente (critère de comparaison pour les séries à termes positifs).

En d'autres termes, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Conclusion. Pour tout réel θ, la série $\sum \dfrac{\arctan(2n+1)}{\pi n^{3/2}} e^{in\theta}$ est convergente.

EXERCICE 20. — Ecrire comme un quotient d'entiers : $0,3535353535\ldots \times 1,21212121\ldots$

Le plus difficile est sans doute de donner un sens précis à l'énoncé.

D'une part : $0,3535353535\ldots = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 35 \times 10^{-2k}$. D'autre part : $1,21212121\ldots = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} 21 \times 10^{-2k}$.

Or :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \times 10^{-2k} = 10^{-2} \times \frac{1}{1-10^{-2}} = 10^{-2} \times \frac{1}{1-10^{-2}} = 10^{-2} \times \frac{100}{99} = \frac{1}{99}$$

Il s'ensuit que :

$$0,3535353535\ldots = \frac{35}{99} \qquad \text{et} \qquad 1,21212121\ldots = 1 + \frac{21}{99} = \frac{120}{99} = \frac{40}{33}$$

Par suite : $0,3535353535\ldots \times 1,21212121\ldots = \dfrac{35}{99} \times \dfrac{40}{33}$.

Conclusion. $0,3535353535\ldots \times 1,21212121\ldots = \dfrac{1400}{3267}$

EXERCICE 21. — **QCM.** Dans cet exercice, je vous demande de faire ce que vous ne seriez absolument pas obligé de faire dans un QCM classique : rédiger des justifications pour les réponses que vous aurez choisies.

1/ **La série** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \tan\left(\frac{1}{n^3}\right)$ **est :**

A. ☐ grossièrement divergente

B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente

C. ☐ convergente

Posons : $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$. On a : $u_n \geqslant 0$. En outre : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^3}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ (série de Riemann avec $\alpha = 3 > 1$) est convergente.

Conclusion. D'après le critère des équivalents, la série $\sum \tan\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ est convergente.

2/ **La série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est :**

A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

Posons : $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. On a : $u_n \geqslant 0$. En outre : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}$ (d'où : $\lim_{+\infty} u_n = 0$).

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ (série de Riemann avec $\alpha = 1$) est divergente.

Conclusion. D'après le critère des équivalents, la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est divergente, mais pas grossièrement divergente puisque son terme général tend vers 0.

3/ **La série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est :**

A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

Posons : $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On a : $u_n \geqslant 0$. En outre : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$) est convergente.

Conclusion. D'après le critère des équivalents, la série $\sum \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

4/ **La série $\sum_{n\geqslant 1} \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/8} - 1\right]$ est :**

A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

Posons : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/8} - 1$. On a : $u_n \geqslant 0$. En outre : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{8n}$ (d'où : $\lim_{+\infty} u_n = 0$).

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ (série de Riemann avec $\alpha = 1$) est divergente.

Conclusion. D'après le critère des équivalents, la série $\displaystyle\sum \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/8} - 1\right]$ est divergente, mais pas grossièrement divergente puisque son terme général tend vers 0.

5/ **La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{n^3} - \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$ est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent (à une constante multiplicative près) à celui d'une série de Riemann avec...**

A. ☐ ... $\alpha = 3$. Donc c'est une série divergente.

B. ☐ ... $\alpha = 6$. Donc c'est une série convergente.

C. ☐ ... $\alpha = 6$. Donc c'est une série divergente.

D. ☐ ... $\alpha = 9$. Donc c'est une série convergente.

Posons : $u_n = \dfrac{1}{n^3} - \sin\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. On a : $u_n \geqslant 0$. En outre : $u_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{6n^9}$.

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n^9}$ (série de Riemann avec $\alpha = 9 > 1$) est convergente.

Conclusion. D'après le critère des équivalents, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left[\frac{1}{n^3} - \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$ est convergente.

Exercice 22. — **(IN-CON-TOUR-NA-BLE !).** Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1/ Etablir que la série $\sum u_n$ est convergente.

Application directe du TSSA.

2/ Etablir que : $v_n \sim_{+\infty} u_n$.

Trivial.

3/ D'après le critère des équivalents, que peut-on conclure des deux questions précédentes ? (attention...)

Rien (les TG des séries considérées ne sont pas de signe constant).

4/ Etablir que la série $\sum v_n$ est divergente.

Par l'absurde, supposons que la série $\sum v_n$ est convergente.

D'après la question 1 et par linéarité de la convergence, on en déduit que la série de TG $v_n - u_n = \dfrac{1}{n}$ converge : c'est absurde !

Conclusion. La série $\sum v_n$ est divergente.

Remarque. L'intérêt de cet exercice est qu'il fournit un exemple de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont les TG sont équivalents, mais qui ne sont pas de même nature.

La motivation pour cet exo est de vous rappeler que la première chose à faire pour appliquer une propriété est de vérifier que ses hypothèses sont satisfaites.

➤ Les exos type "question de cours"

Exercice 23. — (Nature des séries de Riemann) Le but de cet exercice est de redémontrer le critère portant sur les séries de Riemann.

1/ Soit $\alpha \leqslant 0$. Justifier que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Posons $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$ (si $\alpha = 0$), et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ (si $\alpha > 0$).

Dans les deux cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$.

Conclusion. Pour tout réel $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

2/ Soit $\alpha > 0$.

a/ Justifier que la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

Pour tout réel $x \geqslant 1$, posons : $f(x) = x^{-\alpha}$. D'après les théorèmes généraux, f est classe $\mathscr{C}^\infty$ (en particulier continue) sur $[1, +\infty[$; elle est positive sur $[1, +\infty[$ par définition, décroissante sur $[1, +\infty[$ d'après le cours.

b/ Pour tout réel $A \geqslant 1$, on pose : $I(A) = \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$. Calculer $I(A)$, puis déterminer $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)$.

Supposons $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. On a : $I(A) = \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - 1\right)$.

Si $\alpha > 1$, alors : $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = 0$, donc : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Si $\alpha < 1$, alors : $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = +\infty$.

Par ailleurs, si $\alpha = 1$, on a : $I(A) = \ln(A)$, d'où : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = +\infty$.

Conclusion. Si $\alpha > 1$, alors : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = \frac{1}{\alpha-1}$. Et si : $0 < \alpha \leqslant 1$, on a : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = +\infty$.

c/ A l'aide de ce qui précède, donner la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de la valeur de α.

D'après la question 1, pour tout réel $\alpha \leqslant 0$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Lorsque α est strictement positif, la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x^{-\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il est donc légitime d'appliquer le critère de comparaison série/intégrale, pour affirmer que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ sont de même nature.

La conclusion provient de l'application de ce critère, et de l'étude de la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ faite dans la question précédente.

Conclusion. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente SSI $\alpha > 1$.

Exercice 24. — **(Exemples de séries de Bertrand)** Déterminer la nature de chacune des séries suivantes.

1/ $\sum \frac{\ln(n)}{n}$

Posons $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$. On a : $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

La série de terme général n^{-1} étant divergente (série harmonique), on conclut par comparaison.

Conclusion. La série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ est divergente.

2/ $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$

Posons $u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$. On a : $u_n \geqslant 0$.

Soit β un réel tel que : $1 < \beta < \alpha$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\beta u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

Donc : $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.

Or la série $\sum \frac{1}{n^\beta}$ est convergente (série de Riemann avec $\beta > 1$).

On en déduit, d'après le critère de négligeabilité, que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ est convergente.

Conclusion. Pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ est convergente.

3/ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln(n)}$

Posons $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln(n)}$. A partir d'un certain rang, on a : $\ln(n) \leqslant \sqrt{n}$.

Donc, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

La série de terme général n^{-1} étant divergente (série harmonique), on conclut par comparaison.

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\,\ln(n)}$ est divergente.

4/ $\sum \dfrac{1}{n\ \ln^2(n)}$

Posons $u_n = \dfrac{1}{n\ \ln^2(n)}$.

La fonction $x \in [2,+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{x\ln^2(x)}$ est continue, positive et décroissante sur $[2,+\infty[$.

En outre, pour tout réel $A \geqslant 2$, on a :

$$\int_2^A \frac{1}{x\ \ln^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_2^A \frac{\ln^{-2}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^A = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}$$

On en déduit que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{x\ \ln^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}$.

Ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ \ln^2(x)}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

On peut alors conclure en appliquant le critère de comparaison série/intégrale, qu'il est légitime d'appliquer à la lumière des observations faites sur la fonction f.

Conclusion. La série $\sum \dfrac{1}{n\ \ln^2(n)}$ est convergente.

Exercice 25. — **(Séries de Bertrand - Généralisation)** On appelle série de Bertrand une série de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln(n))^\beta}$ où α et β sont deux réels.

1/ Etablir que si $\alpha > 1$, alors la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln(n))^\beta}$ converge.

Posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln(n))^\beta}$.

Soit γ un réel tel que : $1 < \gamma < \alpha$. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^\gamma u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}\,(\ln(n))^\beta} = 0 \text{ par croissances comparées}$$

Donc : $u_n = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$.

Or la série $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ est convergente (série de Riemann avec $\gamma > 1$).

On en déduit, d'après le critère de négligeabilité, que la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln(n))^\beta}$ est convergente.

Conclusion. Pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln(n))^\beta}$ est convergente.

2/ Etablir que si $\alpha < 1$, alors la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge.

Posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = +\infty$ (par croissances comparées, et puisque $\alpha < 1$).

Donc : $\dfrac{1}{n} = o_{+\infty}(u_n)$. Or la série de terme général n^{-1} diverge.

Conclusion. Si $\alpha < 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ diverge.

3/ Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$.

a/ Justifier brièvement que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}x}{x (\ln(x))^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Puis étudier son sens de variation.

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}x}{x (\ln(x))^\beta}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et positive sur $[2, +\infty[$ d'après le cours.

En particulier, f est dérivable sur l'intervalle $[2, +\infty[$, et pour tout réel $x \geqslant 2$, on a :

$$f'(x) = -\frac{\ln^{-\beta-1}(x)\,(\beta + \ln(x))}{x^2}$$

Conclusion. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{d}x}{x (\ln(x))^\beta}$ est continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$.

b/ Pour tout réel $A \geqslant 2$, calculer $I(A) = \displaystyle\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x (\ln(x))^\beta}$. En déduire : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)$.

Soit A un réel tel que $A \geqslant 2$. On a :

$$\int_2^A \frac{\mathrm{d}x}{x (\ln(x))^\beta} = \left[\frac{\ln^{1-\beta}(x)}{1-\beta}\right]_2^A = \frac{1}{1-\beta}\left[\ln^{1-\beta}(A) - \ln^{1-\beta}(2)\right]$$

Or, lorsque A tend vers $+\infty$, $\ln^{1-\beta}(A)$ admet une limite finie si $\beta > 1$, infinie si $\beta < 1$.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x (\ln(x))^\beta}$ est convergente si $\beta > 1$, divergente si $\beta < 1$.

c/ A l'aide de ce qui précède, établir que la série $\sum \dfrac{1}{n\ (\ln(n))^\beta}$ converge SSI $\beta > 1$.

D'après la question précédente, on peut appliquer le critère de comparaison série/intégrale, pour en déduire que la série $\sum \dfrac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ est convergente si $\beta > 1$, divergente si $\beta < 1$.
En outre, le cas $\beta = 1$ a été traité dans l'exercice 6 (la série est divergente).

Conclusion. La série $\sum \dfrac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ est convergente SSI $\beta > 1$.

Exercice 26. — **(Critère spécial des séries alternées)** Soit (u_n) une suite réelle positive et décroissante, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Le but de cet exercice est de prouver que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente. A cette fin, on introduit la suite $(S_N)_N$ des sommes partielles de cette série, en posant :

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$$

1) Montrer que la suite (S_{2N}) est décroissante, et que la suite (S_{2N+1}) est croissante.
2) Etablir que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.
3) Déduire de ce qui précède que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.
4) **Application**. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est semi-convergente, c'est-à-dire qu'elle est convergente, mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

   Fait en classe.

➤ Les exos plus techniques

Exercice 27. — On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Etablir que la série $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge, puis calculer sa somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Par suite :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Conclusion. La série de TG $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente, et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 28. — On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Etablir que la série $\sum \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge, puis calculer sa somme : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

Pour tout entier naturel non nul, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. La série de terme général n^{-2} étant convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), on conclut par comparaison que la série de terme général u_n converge.

Pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{-2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} + \left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)-1\right]$$

Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = -2 + \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge, et sa somme est : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2-9}{3}$.

Exercice 29. — On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$. Calculer les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!}$.

Exercice 30. — Soient a et b deux réels. Le but est d'étudier la série $\sum (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$.

a/ Montrer qu'il existe deux réels α et β, que l'on exprimera en fonction de a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2) = \alpha\ln(n) + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Posons $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$.

On a :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (a+b+1)\ln(n) + \frac{a+2b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

b/ Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la série de terme général $\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge.

Si $a+b+1 \neq 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} (a+b+1)\ln(n)$. Donc u_n ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, et la série diverge grossièrement.

Si $a+b+1 = 0$ et $a+2b \neq 0$, alors $u_n \sim_{+\infty} \frac{a+2b}{n}$. La série de terme général u_n est donc divergente.

En revanche, si $a+b+1 = 0$ et $a+2b = 0$, alors $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série de terme général u_n converge.

Conclusion. On déduit de ce qui précède que la série est convergente SSI $a+b+1 = 0$ et $a+2b = 0$, càd SSI $a = -2$ et $b = 1$.

c/ Dans le cas où elle converge, calculer la somme de la série $\sum (\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$.

D'après la question précédente, on a : $a = -2$ et $b = 1$.

D'où pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n = \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)$$

Ainsi pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} [\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)] &= \sum_{n=1}^{N} [\ln(n) - \ln(n+1)] + \sum_{n=1}^{N} [\ln(n+2) - \ln(n+1)] \\ &= -\ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2) = \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2)\end{aligned}$$

Conclusion. La série de TG $u_n = \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)$ est convergente, et sa somme est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)) = -\ln(2)$$