

CHAPITRE 26 — “L’ESSENTIEL” SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

PRÉAMBULE. Dans une certaine mesure, ce chapitre est le premier du cours de Spé, dans le sens où la notion principale qui y est présentée, celle de série numérique, sera prolongée en PSI/MP lors de l’étude des séries de fonctions, puis des séries entières.

TABLE DES MATIÈRES

1.	Généralités	1
2.	Séries à termes positifs	2
3.	Convergence absolue	5
4.	Exos incontournables sur les séries	5

1. GÉNÉRALITÉS

DÉFINITION 1 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout entier naturel N , on appelle **somme partielle de rang N** (de (u_n)) le scalaire : $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

Observation banale, mais utile. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n = S_n - S_{n-1}$.

DÉFINITION 2 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **série de terme général u_n** la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ de la suite (u_n) .

Une série numérique est donc un cas particulier de suite.

Notation. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On pourra noter $\sum u_n$ la série de terme général u_n .

DÉFINITION 3 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. La série $\sum u_n$ est **convergente** (*resp.* **divergente**) lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_N)_N$ est convergente (*resp.* divergente).

Exemples. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, et la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

PROPRIÉTÉ 1 - Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque importante. La réciproque est évidemment FAUSSE. Il se peut très bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, et que la série $\sum u_n$ soit divergente. L’exemple d’illustration le plus fameux de cette situation est fourni par la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, puisque la somme partielle de rang N associée est minorée par une expression tendant vers $+\infty$, explicitement : $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)$.

La contraposée de la propriété précédente donne naissance à la notion de divergence grossière.

PROPRIÉTÉ 2 - Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On parle dans ce cas de **divergence grossière**.

Exemples. La série $\sum n$ est grossièrement divergente, et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

Ultime énoncé général sur les séries numériques :

PROPRIÉTÉ 3 - (Linéarité de la convergence). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors pour tout couple (λ, μ) de scalaires, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

2. SÉRIES À TERMES POSITIFS

Dans ce paragraphe, les séries considérées ont des termes généraux dans $\mathbb{R}_+$. Dans ce contexte, les suites des sommes partielles seront positives et croissantes.

PROPRIÉTÉ 4 - (Comparaison). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.

Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Exemple. Pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$. Puisque les séries de termes généraux $\frac{1}{\ln(n)}$ et $\frac{1}{n}$ sont à termes positifs, et que la série de terme général $1/n$ diverge (série harmonique), on en déduit que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

Pour pouvoir étudier des séries plus variées, on commence par étudier trois cas particuliers.

TROIS SÉRIES DE RÉFÉRENCE

PROPRIÉTÉ 5 - (Séries géométriques). Soit $q \in \mathbb{C}$.

➤ La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas : $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n = \frac{1}{1 - q}$.

PROPRIÉTÉ 6 - (Séries télescopiques). Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

La série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge.

➤ Dans ce cas : $\sum_{n \in \mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n) = \ell - u_0$, où l'on a noté $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a aussi, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell - u_{n_0}$.

Exemple. La série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ converge, et a pour somme : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$.

Place maintenant à un critère d'importance CRUCIALE en pratique.

PROPRIÉTÉ 7 - (Séries de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

➤ La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente, puisque $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ et que $3/2 > 1$.

Gardant ces exemples en mémoire, on peut reprendre le cours de notre étude des séries à termes positifs.

PROPRIÉTÉ 8 - (Equivalents). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives.

Si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 1. La série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

Exemple 2. La série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ est convergente.

Exemple 3. La série $\sum n^\alpha \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$ est convergente SSI $\alpha < 0$.

Exemple 4. La série $\sum \frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)}$ est convergente, puisque $\frac{\text{ch}(n)}{\text{ch}(2n)} \sim_{+\infty} e^{-n}$ (et que e^{-n} est le terme général d'une série géométrique convergente).

Exemple 5. La série de terme général $\frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Exemple 6. La série de terme général $n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ est divergente.

PROPRIÉTÉ 9 - (Négligeabilité). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives.

On suppose que $u_n = o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Remarque. Evidemment, l'énoncé précédent peut encore être lu “dans l'autre sens” : si $u_n = o(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ est divergente.

Ce critère de négligeabilité induit une méthode bien pratique pour montrer la convergence d'une série.

COROLLAIRE 1 - Soit (u_n) une suite réelle positive.

Si $\lim_{+\infty} n^2 u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Plus généralement d'ailleurs, si $\lim_{+\infty} n^\alpha u_n = 0$ pour un réel $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple. La série $\sum ne^{-n}$ est convergente, puisque $n^2 \times (ne^{-n}) = n^3 e^{-n}$ a pour limite 0 en $+\infty$ (croissances comparées).

PROPRIÉTÉ 10 - (Domination). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives.

On suppose que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

PROPRIÉTÉ 11 - (Comparaison série/intégrale). Soit f une fonction à valeurs réelles, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

La série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ sont de même nature (avec a réel positif quelconque).

Exemple. Etudions la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$. Celle-ci est à termes positifs, et la suite de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ décroissante (sur $\mathbb{N}^*$).

En outre pour tout réel $A \geq 2$ on a : $\int_2^A \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln(\ln(A)) - \ln(\ln(2)) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty$.

On en déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(x)}$ est divergente. D'après le critère de comparaison série/intégrale, on peut conclure.

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

3. CONVERGENCE ABSOLUE

Dans ce paragraphe, on revient au cas général, en considérant des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 4 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

La série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Exemple. Pour tout réel θ , et pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

PROPRIÉTÉ 12 - (“ACv $\implies$ Cv”). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque 1. Cette propriété est d'une grande importance pratique, puisqu'elle permet de ramener l'étude des séries en général à celle des séries à termes positifs (pour lesquelles on dispose d'un “arsenal” impressionnant, cf paragraphe précédent).

Remarque 2. La remarque précédente a cependant ses limites, dans le sens où la réciproque de la propriété est fausse. Il existe en effet des séries qui sont convergentes, mais non absolument convergentes ; de telles séries sont dites **semi-convergentes**.

L'exemple le plus célèbre de série semi-convergente est la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$: en effet, celle-ci converge et a pour somme $\ln 2$ (conséquence de Taylor avec reste intégrale), mais elle n'est évidemment pas absolument convergente (la série des modules est la série harmonique).

4. EXOS INCONTOURNABLES SUR LES SÉRIES

Les exos sur les séries à avoir fait absolument avant d'aller en Spé sont tous ceux de la feuille 26 évidemment mais en particulier les numéros :

16, 22, 23, 24, 25, 26