

EXERCICES 26 - SÉRIES NUMÉRIQUES

PRÉSENTATION — *S'il y a vraiment un chapitre à maîtriser avant d'arriver en Spé*, c'est bien celui portant sur les séries numériques. Les exercices ci-dessous à la frontière entre Sup et Spé, ne demandent bien entendu que des connaissances de Sup, mais constituent une base pour une partie importante du programme de Spé.*

LE POINT SUR LES SÉRIES EN SUP — STRATÉGIE D'ÉTUDE

Pour commencer, gardez présent à l'esprit qu'une série numérique n'est finalement rien d'autre qu'une suite (une suite de sommes partielles). Or dans le contexte général des suites, on peut se poser essentiellement deux questions : celle de sa nature (convergente ou divergente), et lorsqu'elle converge celle de sa limite. Les exercices de cette feuille tourneront donc autour des deux problèmes suivants : étant donnée une série numérique $\sum u_n$,

Question 1 — quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum u_n$?

Question 2 — si la série $\sum u_n$ converge, que vaut sa somme ?

► Un algorithme pour répondre à la question 1

Étape 1 : a-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$? Si oui, passer à l'étape 2. Sinon, la série **diverge grossièrement** (et c'est fini).

Étape 2 : la suite (u_n) est-elle à termes positifs ? Si oui, passer à l'étape 3 ; sinon passer à l'étape 4.

Étape 3 : essayer de déterminer la nature de la série en utilisant l'un des critères suivants, valides pour les séries à termes REELS POSITIFS :

→ Critère de **comparaison** : si $u_n \leq v_n$, $[\sum v_n \text{ converge}] \implies [\sum u_n \text{ converge}]$

→ Critère des **équivalents** : si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

→ Critère des “o” : si $u_n = o(v_n)$, $[\sum v_n \text{ converge}] \implies [\sum u_n \text{ converge}]$

→ “**Règle de Riemann**” : si $\exists \alpha > 1$ tqe $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $[\sum u_n \text{ converge}]$

→ Critère de **comparaison série-intégrale** : si $f \geq 0$, $\mathcal{C}^0$ et $\searrow$, $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f$ sont de même nature

où u_n est le terme général de la série étudiée, et v_n est le terme général d'une série de référence parmi les suivantes :

→ Série **de Riemann** : $[\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}] \iff [\alpha > 1]$

→ Série **télescopique** : $[\sum (w_{n+1} - w_n) \text{ converge}] \iff [(w_n) \text{ converge}]$

→ Série **géométrique** : soit $q \in \mathbb{C}$. $[\sum q^n \text{ converge}] \iff [|q| < 1]$

Étape 4 : on considère la série de terme général $|u_n|$ (qui est un réel positif, si, si!), et on retourne à l'étape 3. Deux cas peuvent se présenter :

→ la série $\sum |u_n|$ converge, et alors la série $\sum u_n$ converge puisque :

$[\text{Absolument convergente}] \implies [\text{Convergente}]$

→ la série $\sum |u_n|$ diverge, et on ne peut alors pas conclure sur la nature de $\sum u_n$ (en Sup).

*. En dehors de celui sur la trigonométrie, celui sur les nombres complexes, celui sur les fonctions de référence, celui sur les suites réelles ou complexes, celui sur les polynômes, celui sur le calcul matriciel, celui sur la continuité, celui sur la dérivabilité et celui sur ses applications, celui sur les équations différentielles, celui sur l'analyse asymptotique et en particulier les développements limités, ceux sur le calcul intégral, ceux d'algèbre linéaire et si vous vous destinez à une MP, celui sur les groupes et le chapitre d'arithmétique.

► Trois méthodes pour répondre à la question 2

Le calcul de la somme d'une série convergente n'est pas facile en général. Néanmoins, dans quelques cas particuliers, le calcul de la somme est possible, explicitement :

→ **Somme d'une série géométrique** : si $q \in \mathbb{C}$ et si $|q| < 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

→ **Somme d'une série télescopique** : si (w_n) converge : $\sum_{n=0}^{+\infty} (w_{n+1} - w_n) = \lim_{+\infty} w_n - w_0$

→ **Formule de Taylor avec reste intégrale** : voir exemples dans le complément sur le chapitre 25. Permet

d'établir que : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. En particulier : $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Autre application : $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

► Exemples d'application directe

Point par point, chacune des questions ci-dessous illustre les critères mentionnés ci-dessus.

EXERCICE 1. — (**Divergence grossière**) Montrer que la série $\sum \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ est grossièrement divergente.

EXERCICE 2. — (**Critère de comparaison**) Montrer que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

EXERCICE 3. — (**Critère des équivalents**) Montrer que la série $\sum n \arctan\left(\frac{1}{n^4}\right)$ est convergente.

EXERCICE 4. — (**Critère de négligeabilité**) Montrer que la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^3}$ est convergente, en justifiant que : $\frac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

EXERCICE 5. — (**Règle de Riemann**) Montrer que pour tout réel $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ est convergente, en justifiant que pour tout réel $1 < \beta < \alpha$, on a : $\lim_{+\infty} n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

EXERCICE 6. — (**Comparaison série-intégrale**) Soit f définie par : $\forall x \geq 2, f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$.

1) Etudier le sens de variation de f sur $[2, +\infty[$. 2) Pour tout réel $A \geq 2$, calculer : $I(A) = \int_2^A \frac{1}{x \ln(x)} dx$.

3) En déduire la nature de $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$.

EXERCICE 7. — (**Somme d'une série géométrique**) Montrer que : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$

EXERCICE 8. — (**Somme d'une série télescopique**) Calculer $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^3 - n}$

► **ET MAINTENANT, À VOUS DE JOUER !**

► **Les applications directes du cours**

EXERCICE 9. — Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont :

1) $u_n = \frac{n^{3/2}}{n+1}$ 2) $u_n = \frac{1}{n^2-1}$ (et calculer $\sum_{n \geq 2} u_n$) 3) $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ (et calculer $\sum_{n \geq 2} u_n$)	4) $u_n = \frac{1}{n \sin^2 n}$ 5) $u_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 6) $u_n = \frac{\text{ch}(2022n)}{\text{ch}(2023n)}$
--	--

EXERCICE 10. — Pour tout réel $x \in]-1, 1[$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

EXERCICE 11. — Soit α un réel. Déterminer en fonction de α la nature de la série $\sum n^\alpha \left[\sin^2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} \right]$.

EXERCICE 12. — Quelle est la nature de la série : $\sum_{n \geq 1} n^2 \left[\tan^2\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} \right]$?

EXERCICE 13. — Justifier la convergence, puis calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k}$

EXERCICE 14. — On pose : $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$.

Pour tout réel x de $]0; 1[$, montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

EXERCICE 15. — En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, établir que pour tout réel x , la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et calculer sa somme (complément du chapitre 25).

EXERCICE 16. — En utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale, établir que la série de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (complément du chapitre 25).

EXERCICE 17. — Soit x un réel tel que : $0 \leq x < \frac{1}{e}$. Montrer que la série $\sum \frac{x^n \text{sh}(n)}{n(n+1)}$ est convergente.

EXERCICE 18. — Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^2}$ (avec θ réel quelconque).

EXERCICE 19. — Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\arctan(2n+1)}{\pi n^{3/2}} e^{in\theta}$ (avec θ réel quelconque).

EXERCICE 20. — Ecrire comme un quotient d'entiers : $0,3535353535\dots \times 1,21212121\dots$

EXERCICE 21. — QCM. Dans cet exercice, je vous conseille de faire ce que vous ne seriez absolument pas obligé de faire dans un QCM classique : rédiger des justifications pour les réponses que vous aurez choisies.

1/ La série $\sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est :

- A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

2/ La série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est :

- A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

3/ La série $\sum_{n \geq 1} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est :

- A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

4/ La série $\sum_{n \geq 1} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/8} - 1 \right]$ est :

- A. ☐ grossièrement divergente B. ☐ divergente, mais pas grossièrement divergente C. ☐ convergente

5/ La série $\sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n^3} - \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \right]$ est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent (à une constante multiplicative près) à celui d'une série de Riemann avec...

- A. ☐ ... $\alpha = 3$. Donc c'est une série divergente. C. ☐ ... $\alpha = 6$. Donc c'est une série divergente.
B. ☐ ... $\alpha = 6$. Donc c'est une série convergente. D. ☐ ... $\alpha = 9$. Donc c'est une série convergente.

EXERCICE 22. — (IN-CON-TOUR-NA-BLE !). Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1/ Etablir que la série $\sum u_n$ est convergente.

2/ Etablir que : $v_n \sim_{+\infty} u_n$.

3/ D'après le critère des équivalents, que peut-on conclure des deux questions précédentes ? (attention...)

4/ Etablir que la série $\sum v_n$ est divergente.

► **Les exos type “question de cours”**

EXERCICE 23. — (**Nature des séries de Riemann**). Le but de cet exercice est de démontrer le critère portant sur les séries de Riemann.

1) Soit $\alpha \leq 0$. Justifier que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

2) Soit $\alpha > 0$.

a) Justifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

b) Pour tout réel $A \geq 1$, on pose : $I(A) = \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha}$. Calculer $I(A)$, puis déterminer $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$.

c) A l'aide de ce qui précède, donner la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en fonction de la valeur de α .

EXERCICE 24. — (**Exemples de séries de Bertrand**) Déterminer la nature de chacune des séries suivantes :

$$1) \sum \frac{\ln(n)}{n} \qquad 2) \sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha} \ (\alpha > 1) \qquad 3) \sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)} \qquad 4) \sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$$

EXERCICE 25. — (**Séries de Bertrand - Généralisation**) On appelle série de Bertrand une série de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ où α et β sont deux réels, avec $\beta \geq 0$.

1) Etablir que si $\alpha > 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge.

2) Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$.

a) Justifier que $f : x \mapsto \frac{dx}{x (\ln(x))^\beta}$ est continue et positive sur $[2, +\infty[$. Puis étudier son sens de variation.

b) Pour tout réel $A \geq 2$, calculer $I(A) = \int_2^A \frac{dx}{x (\ln(x))^\beta}$. En déduire : $\lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$.

c) A l'aide de ce qui précède, établir que la série $\sum \frac{1}{n (\ln(n))^\beta}$ converge SSI $\beta > 1$.

EXERCICE 26. — (**Critère spécial des séries alternées**) Soit (u_n) une suite réelle positive et décroissante, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Le but de cet exercice est de prouver que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente. A cette fin, on introduit la suite $(S_N)_N$ des sommes partielles de cette série, en posant :

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n u_n$$

1) Montrer que la suite (S_{2N}) est décroissante, et que la suite (S_{2N+1}) est croissante.

2) Etablir que les suites (S_{2N}) et (S_{2N+1}) sont adjacentes.

3) Déduire de ce qui précède que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

4) **Application.** Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est semi-convergente, c'est-à-dire qu'elle est convergente, mais qu'elle n'est pas absolument convergente.

► Les exos plus techniques

EXERCICE 27. — On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Etablir que la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge, puis calculer sa somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

EXERCICE 28. — On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Etablir que la série $\sum \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge, puis calculer sa somme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

EXERCICE 29. — On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Calculer les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-1}{n!}$.

EXERCICE 30. — Soient a et b deux réels. Le but est d'étudier la série $\sum (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$.

a) Montrer qu'il existe deux réels α et β , que l'on exprimera en fonction de a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = \alpha \ln(n) + \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

b) Dédire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour que la série de terme général $\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ converge.

c) Dans le cas où elle converge, calculer la somme de la série $\sum (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$.