

COLLE 27 — QUESTIONS DE COURS

QUESTION DE COURS 1 — Propriété. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

+ **RECIPROQUE FAUSSE!** La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

PREUVE. Avec les notations du cours, si la série de terme général u_n converge, alors il existe un réel ℓ telle que la suite des sommes partielles (S_N) converge vers ℓ . Il s'ensuit en particulier que $S_n - S_{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, d'où la conclusion puisque : $S_n - S_{n-1} = u_n$.

Conclusion. $\left[\sum u_n \text{ converge} \right] \implies \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \right]$.

Réciproque fausse. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$.

Pour tout réel $x \in [n, n+1]$, on a : $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x}$.

En intégrant cette inégalité sur $[n, n+1]$,* on obtient : $\frac{1}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln(n)$.

On en déduit "télescopiquement" que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \ln(N+1)$.

Il s'ensuit que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Conclusion. $\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \right]$ mais $\left[\sum \frac{1}{n} \text{ diverge} \right]$.

Exemple d'application. La série $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2}$ est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2} = +\infty$.

QUESTION DE COURS 2 — Exercice. Montrer que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente, puis calculer sa somme.

PREUVE. Posons : $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. Il est clair que u_n est positif, et que $u_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n^3}$. On en déduit que la série $\sum u_n$ converge, puisque son terme général est positif et équivalent au terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 3 > 1$).

Calculons sa somme. On commence par observer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$.

On en déduit que pour tout entier naturel N non nul on a :

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} \right]$$

*. Et par croissance de l'intégrale.

Par suite : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \frac{3}{4}$.

Conclusion. La série $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente, et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{4}$.

QUESTION DE COURS 3 — Propriété (séries géométriques). Soit $q \in \mathbb{C}$.

La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Et dans ce cas : $\sum_{n \in \mathbb{N}} q^n = \frac{1}{1-q}$.

PREUVE. Lorsque q est de module supérieur ou égal à 1, la série de terme général q^n diverge grossièrement.

Lorsque $|q| < 1$, on a : $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$. Puisque : $\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1} = 0$, on en déduit que la série de terme

général q^n converge, et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. **Conclusion.** $\left[\sum q^n \text{ converge} \right] \iff [|q| < 1]$.

Exemple d'application. La série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$. En revanche, la série de terme général $\sum e^{in\theta}$ diverge (grossièrement) pour toute valeur du réel θ .

QUESTION DE COURS 4 — Propriété (équivalents). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

PREUVE. Puisque les suites u et v sont réelles positives, et que $u_n \sim_{+\infty} v_n$, il existe une suite (φ_n) réelle positive telle que :

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \varphi_n v_n] \quad \text{et} \quad \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 1 \right]$$

En particulier, pour n suffisamment grand : $\frac{1}{2} \leq \varphi_n \leq \frac{3}{2}$

D'où, pour n suffisamment grand : $\frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n$.

Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum \frac{3}{2} v_n$ converge, et on en déduit que la série $\sum u_n$ converge d'après la propriété de comparaison pour les séries à termes positifs.

En revanche, si la série $\sum v_n$ diverge, alors la série $\sum \frac{1}{2} v_n$ diverge, et on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge, encore une fois par comparaison.

Conclusion. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n \sim_{+\infty} v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple d'application. La série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente ; la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)$ est convergente.

QUESTION DE COURS 5 — Propriété (négligeabilité). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que $u_n = o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

PREUVE. Puisque les suites u et v sont réelles positives, et que $u_n = o(v_n)$, il existe une suite (φ_n) réelle positive telle que :

$$[\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \varphi_n v_n] \quad \text{et} \quad \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n = 0 \right]$$

En particulier, pour n suffisamment grand : $0 \leq \varphi_n \leq \frac{1}{2}$

D'où, pour n suffisamment grand : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} v_n$.

La série $\sum v_n$ étant convergente par hypothèse, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge d'après la propriété de comparaison pour les séries à termes positifs, d'où la conclusion.

Conclusion. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives, telles que $u_n = o(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Exemple d'application. La série $\sum \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2}}_{=u_n}$ est convergente, puisque $u_n \geq 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} u_n = 0$.

QUESTION DE COURS 6 — Propriété (“AC $\implies$ C”). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

PREUVE. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, telle que la série $\sum |u_n|$ converge.

➤ **1er cas — Si (u_n) est réelle positive.** Alors $\sum u_n$ converge, puisque $|u_n| = u_n \dots$

➤ **2ème cas — Si (u_n) est réelle.** Posons pour tout entier n :

$$u_n^+ = \max(0, u_n) \quad \text{et} \quad u_n^- = \min(0, u_n)$$

Pour tout entier n , on a :

$$u_n = u_n^+ + u_n^- \quad \text{et} \quad |u_n| = u_n^+ - u_n^-$$

La série de terme général u_n^+ converge (hypothèse + positivité + comparaison), donc la série de terme général u_n^- converge (ce qui précède + linéarité). On en déduit que la série de terme général u_n converge.

➤ **3ème cas — Si (u_n) est complexe.** Pour tout entier n , on a :

$$|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$$

Puisque la série de terme général $|u_n|$ converge, on en déduit par comparaison que les séries de termes généraux respectifs $|\operatorname{Re}(u_n)|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)|$ convergent, puis (d'après le second cas) que les séries de termes généraux respectifs $\operatorname{Re}(u_n)$ et $\operatorname{Im}(u_n)$ convergent, d'où la conclusion.

Exemple d'application. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente, car absolument convergente.