CONCOURS BLANC JUIN **2023**

MATHÉMATIQUES - “SPÉ MP”

Durée : 2 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Les résultats doivent être* ***soulignés*** *ou* $\boxed{\textbf{\textit{encadrés}}}$.
- *Ecrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

$\boxed{\textbf{Les calculatrices sont interdites}}$

Le sujet est composé de 2 exercices indépendants.

Exercice 1 — (Un nouveau calcul de $\zeta(2)$). Soient n un entier naturel non nul, et $R = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.
On indique que, lorsque R possède n racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la somme des racines de R est donnée par :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Par ailleurs, tout au long de cet exercice, on note :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left[(X+\mathrm{i})^{2n+1} - (X-\mathrm{i})^{2n+1}\right]$$

1. On pose $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/(2n+1)}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Etablir que :

$$[z \text{ racine de } P_n] \iff \left[\exists\, k \in [\![\, 1, 2n \,]\!],\ \left(\omega^k - 1\right) z = \mathrm{i}\left(\omega^k + 1\right)\right]$$

2. Déduire de ce qui précède les racines du polynôme P_n.

3. En développant le polynôme P_n, établir qu'il existe un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que :

$$P_n(X) = Q_n\left(X^2\right)$$

4. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n.

5. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)}$.*

a. En utilisant des résultats précédents, établir que :

$$S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$$

b. Justifier que :

$$\forall\, x \in [0, \pi/2[\,, \qquad 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

c. En déduire que :

$$\forall\, x \in\ ]0, \pi/2[\,, \qquad \frac{1}{\tan^2(x)} \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

d. Etablir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{6}$$

En déduire la valeur exacte de $\zeta(2) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\ldots$

---

*. Indication : S_n est la somme des racines de Q_n, et $Q_n = (2n+1)X^n - \dbinom{2n+1}{3} X^{n-1} + \cdots$

Exercice 2 — (Sur la répartition des nombres premiers).

Notations. Tout au long de ce problème, on note (p_k) la suite croissante des nombres premiers (ainsi : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$).

Pour tout couple (x, y) de réels positifs avec $x > y$, on définit $P(x, y)$ comme valant :

- 1 si l'intervalle $]y, x]$ ne contient aucun nombre premier ;
- le produit des nombres premiers de l'intervalle $]y, x]$ sinon.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $K(x) = P(x, 0)$.

1. Préciser la valeur de $K(x)$, pour tout réel $x \in]0; 6]$. Préciser également les points de discontinuité † de la fonction K.

2. Soient trois réels $z < y < x$. Justifier brièvement que :

$$P(x, z) = P(x, y)P(y, z)$$

3. Soit m un entier naturel non nul.

a. Montrer que : $2 \times \binom{2m+1}{m} \leqslant 2 \times 4^m$

b. On suppose que $P(2m + 1, m + 1)$ admet un diviseur premier p. Montrer que p divise $(2m + 1)!$.

En déduire que p divise $\binom{2m+1}{m}$.

c. Montrer que $P(2m + 1, m + 1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

d. En déduire que si $K(m + 1) \leqslant 4^{m+1}$, alors $K(2m + 1) \leqslant 4^{2m+1}$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad K(n) \leqslant 4^n$$

5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad K(x) \leqslant 4^x$$

Remarque : en fait, on peut aller plus loin et établir que : $K(n) \sim_{+\infty} 4^n$*. C'est un premier pas pour établir que le nombre* $\Pi(n)$ *de nombres premiers inférieurs à* n *vérifie :*

$$\Pi(n) \sim_{+\infty} \frac{n}{\ln(n)}$$

Ceci signifie que la probabilité pour qu'un entier $\leqslant n$ *pris au hasard soit premier est environ* $\frac{1}{\ln(n)}$.

Par exemple, la probabilité qu'un entier $\leqslant 10^2$ *pris au hasard soit premier est environ* 0.22 *(grossièrement, une chance sur 4) ; la probabilité qu'un entier* $\leqslant 10^6$ *pris au hasard soit premier est environ* 0.072 *(grossièrement, une chance sur 14).*

A la limite, la probabilité qu'un entier (tout court) pris au hasard soit premier est nulle.

†. Càd les réels de l'intervalle $]0; 6]$ où la fonction K n'est pas continue.