

CONCOURS BLANC JUIN 2023

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES “SPÉ MP”

EXERCICE 1 — (UN NOUVEAU CALCUL DE $\zeta(2)$).Soient n un entier naturel non nul, et

$$R = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X].$$

On indique que, lorsque R possède n racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, la somme des racines de R est donnée par :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Par ailleurs, tout au long de cet exercice, on note :

$$P_n = \frac{1}{2i} [(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}]$$

1. On pose $\omega = e^{2i\pi/(2n+1)}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Etablir que :

$$[z \text{ racine de } P_n] \iff [\exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, (\omega^k - 1)z = i(\omega^k + 1)]$$

Soit z un nombre complexe. On a :

$$z \text{ racine de } P_n$$

$$\iff P_n(z) = 0$$

$$\iff (z + i)^{2n+1} = (z - i)^{2n+1}$$

$$\iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right)^{2n+1} = 1$$

$$\iff \left(\frac{z + i}{z - i} \right) \in \mathbb{U}_{2n+1}$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \left(\frac{z + i}{z - i} \right) = e^{2ik\pi/(2n+1)}$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \left(\frac{z + i}{z - i} \right) = \omega^k$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, z + i = \omega^k(z - i)$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, i(\omega^k + 1) = (\omega^k - 1)z$$

$$\iff \exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, i(\omega^k + 1) = (\omega^k - 1)z$$

La dernière équivalence est justifiée par le fait suivant : lorsque $k = 0$, on déduit de l'avant-dernière ligne de calcul que $2 = 0$...**Conclusion.** $[z \text{ racine de } P_n] \iff [\exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, (\omega^k - 1)z = i(\omega^k + 1)]$

2. Dédurre de ce qui précède les racines du polynôme P_n .

D'après ce qui précède : $[z \text{ racine de } P_n] \iff [\exists k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, (\omega^k - 1)z = i(\omega^k + 1)]$.

Soit k un entier de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} (\omega^k - 1)z &= i(\omega^k + 1) \\ \iff z &= i \frac{\omega^k + 1}{\omega^k - 1} \\ \iff z &= i \frac{\omega^{k/2} + \omega^{-k/2}}{\omega^{k/2} - \omega^{-k/2}} \\ \iff z &= i \frac{e^{ik\pi/(2n+1)} + e^{-ik\pi/(2n+1)}}{e^{ik\pi/(2n+1)} - e^{-ik\pi/(2n+1)}} \\ \iff z &= i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \\ \iff z &= \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion. Les racines du polynôme P_n sont les $2n$ réels de l'ensemble : $\left\{ \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket \right\}$

3. En développant le polynôme P_n , établir qu'il existe un polynôme Q_n de degré n et à coefficients réels tel que :

$$P_n(X) = Q_n(X^2)$$

$$\text{D'une part : } (X + i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k X^{2n+1-k}.$$

$$\text{D'autre part : } (X - i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k i^k X^{2n+1-k}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k X^{2n+1-k} + \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{k+1} i^k X^{2n+1-k} \\ \iff (X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} (1 + (-1)^{k+1}) \binom{2n+1}{k} i^k X^{2n+1-k} \end{aligned}$$

En observant que $(1 + (-1)^{k+1}) = 0$ si k est pair, et 2 si k est impair, on en déduit que :

$$\begin{aligned}(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1} &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} i^{2k+1} X^{2(n-k)} \\ \iff (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1} &= 2i \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k (X^2)^{n-k}\end{aligned}$$

Par suite : $P_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k (X^2)^{n-k}.$

Conclusion. $P_n(X) = Q_n(X^2)$ avec $Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$

4. Déterminer les racines de Q_n en fonction de celles de P_n .

Soit z un nombre complexe. Il résulte de la question précédente que :

$$z \text{ racine de } P_n \iff z^2 \text{ racine de } Q_n$$

D'après la question 2, on en déduit que Q_n possède exactement n racines, qui sont les n réels de l'ensemble :

$$\left\{ \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}, k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

5. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}.$

a. En utilisant des résultats précédents, établir que :

$$S_n = \frac{n(2n-1)}{3}$$

D'après la question 4, S_n est la somme des racines de Q_n .

D'après l'indication de l'énoncé, on en déduit que :

$$S_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

où a_{n-1} et a_n désignent les coefficients respectifs de X^{n-1} et X^n dans Q_n .

Or d'après la question 3 : $a_n = \binom{2n+1}{1}$ et $a_{n-1} = -\binom{2n+1}{3}.$

D'où : $a_n = 2n+1$ et $a_{n-1} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = -\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$

Il s'ensuit que : $S_n = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$

b. Justifier que :

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad 0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

A l'origine, les courbes représentatives de $\sin$ et $\tan$ admettent la droite d'équation $y = x$ comme tangente. Puisque la fonction $\sin$ (resp $\tan$) est concave (resp convexe) sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, on en déduit que :

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

On conclut en observant que $\sin$ est positive sur $[0, \pi/2[$

c. En déduire que :

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

D'après la question précédente :

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad 0 < \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

d'où :

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad 0 < \sin^2(x) \leq x^2 \leq \tan^2(x)$$

d'où :

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$$

En observant que :

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + 1 = \frac{1}{\tan^2(x)} + 1$$

on obtient la conclusion désirée :

$$\forall x \in]0, \pi/2[, \quad \frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{\tan^2(x)}$$

d. Etablir que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \underset{+}{\sim} \frac{\pi^2}{6}$$

En déduire la valeur exacte de $\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \dots$

Soit n un entier naturel non nul. On a d'après la question précédente :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + 1$$

En sommant ces encadrements, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} + 1 \right)$$

soit

$$S_n \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq n + S_n$$

En utilisant l'expression de S_n obtenue à la question 5.a, on en déduit que :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

d'où

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

Ce que l'on peut réécrire :

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} + o_{+\infty} \left(\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \right)$$

Il s'ensuit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

Or : $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{2n^2\pi^2}{12n^2}$ soit : $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2}{6}$

Finalement : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \sim_{+\infty} \frac{\pi^2}{6}$.

En particulier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Conclusion. La série de terme général $\frac{1}{n^2}$, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

EXERCICE 2 — (SUR LA RÉPARTITION DES NOMBRES PREMIERS).

Notations. Tout au long de ce problème, on note (p_k) la suite croissante des nombres premiers (ainsi : $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$).

Pour tout couple (x, y) de réels positifs avec $x > y$, on définit $P(x, y)$ comme valant :

- 1 si l'intervalle $]y, x]$ ne contient aucun nombre premier ;
- le produit des nombres premiers de l'intervalle $]y, x]$ sinon.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $K(x) = P(x, 0)$.

1. Préciser la valeur de $K(x)$, pour tout réel $x \in]0; 6]$. Préciser également les points de discontinuité* de la fonction K .

Par définition de la fonction K , on a :

$$\forall x \in]0, 6], \quad K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 6 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 30 & \text{si } 5 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

La fonction K est discontinue en 2, 3 et 5.

2. Soient trois réels $z < y < x$. Justifier brièvement que :

$$P(x, z) = P(x, y)P(y, z)$$

C'est une conséquence directe de la définition de la fonction P , et du fait que l'intervalle $]z, x]$ est la réunion disjointe des intervalles $]z, y]$ et $]y, x]$.

3. Soit m un entier naturel non nul.

- a. Montrer que : $2 \times \binom{2m+1}{m} \leq 2 \times 4^m$

Soit m un entier naturel non nul. On a :

$$2 \times \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leq \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1} = 2 \times 4^m$$

Conclusion. $\forall m \in \mathbb{N}^*, 2 \times \binom{2m+1}{m} \leq 2 \times 4^m$.

- b. On suppose que $P(2m+1, m+1)$ admet un diviseur premier p . Montrer que p divise $(2m+1)!$.

En déduire que p divise $\binom{2m+1}{m}$.

Notons p un diviseur premier de $P(2m+1, m+1)$. Puisque $P(2m+1, m+1)$ est le produit des nombres premiers entre $(m+2)$ et $(2m+1)$, p est lui-même un nombre premier compris entre $(m+2)$ et $(2m+1)$.

*. C-à-d les réels de l'intervalle $]0; 6]$ où la fonction K n'est pas continue.

A ce titre, il divise le produit de tous les entiers inférieurs ou égaux à $(2m+1)$.

Conclusion 1. Si $P(2m+1, m+1)$ admet un diviseur premier p , alors p divise $(2m+1)!$.

D'après la question précédente : p divise $m!(m+1)!\binom{2m+1}{m}$. Or p est premier avec $m!$ et avec $(m+1)!$ (puisque p est premier et $p > m+1$). Donc p est premier avec $m!(m+1)!$. On en déduit, avec le lemme de Gauss, que p divise $\binom{2m+1}{m}$.

Conclusion 2. Si p est un diviseur premier p , alors p divise $\binom{2m+1}{m}$.

c. Montrer que $P(2m+1, m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

D'après la question précédente, tout nombre premier compris entre $m+1$ et $2m+1$ divise $\binom{2m+1}{m}$; donc leur produit divise $\binom{2m+1}{m}$.

Conclusion. $P(2m+1, m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$.

d. En déduire que si $K(m+1) \leq 4^{m+1}$, alors $K(2m+1) \leq 4^{2m+1}$.

On a : $K(2m+1) = P(2m+1, m+1)K(m+1)$.

Puisque $P(2m+1, m+1)$ divise $\binom{2m+1}{m}$, alors $P(2m+1, m+1) \leq \binom{2m+1}{m}$.

Donc : $P(2m+1, m+1) \leq 4^m$ (question 3-a).

Puisque $K(m+1) \leq 4^{m+1}$ par hypothèse, on en déduit que : $K(2m+1) \leq 4^m \times 4^{m+1}$.

Conclusion. Si $K(m+1) \leq 4^{m+1}$, alors $K(2m+1) \leq 4^{2m+1}$.

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(n) \leq 4^n$$

Pour tout entier n non nul, notons $P(n)$ l'assertion : " $K(n) \leq 4^n$ ".

Pour $n=1$ on a : $K(1) = 1 \leq 4$. D'où $P(1)$ est vraie.

Pour $n=2$ on a : $K(2) = 2 \leq 16$. D'où $P(2)$ est vraie.

Hérédité : supposons que $P(n)$ est vraie jusqu'à un certain rang n , avec n entier ≥ 2 .

Si $n+1$ n'est pas un nombre premier, alors : $K(n+1) = K(n) \leq 4^n$ par HR. A fortiori : $K(n+1) \leq 4^{n+1}$.

Si $n+1$ est premier, alors il est impair (puisque $n \geq 2$), donc il existe un entier $m \leq n$ tel que $n+1 = 2m+1$.

On a alors $K(n+1) = K(2m+1)$ et $K(m) \leq 4^m$ par HR.

On en déduit avec la question précédente, que : $K(n+1) \leq 4^{2m+1}$, càd : $K(n+1) \leq 4^{n+1}$. Récurrence établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad K(n) \leq 4^n$

5. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad K(x) \leq 4^x$$

► Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Par définition de la fonction K , on a : $K(x) = K(\lfloor x \rfloor)$.

Or d'après la question précédente : $K(\lfloor x \rfloor) \leq 4^{\lfloor x \rfloor}$.

En particulier : $K(\lfloor x \rfloor) \leq 4^x$. Donc : $K(x) \leq 4^x$.

► Par ailleurs, si $0 < x < 1$, alors $K(x) = 1$. En particulier : $K(x) \leq 4^x$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad K(x) \leq 4^x$.