

CONCOURS BLANC JUIN 2023

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
 - *Ne pas utiliser de correcteur.*
 - *Les résultats doivent être soulignés ou encadrés.*
 - *Ecrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
-

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

EXERCICE 1 — **(PROBABILITÉS).** Soit $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^m \right] = \frac{1}{m+1}$$

Soient k et n dans $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n .

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

1. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n .

2. Soit $j \in J$. Calculer $P(X_n \leq j)$, et prouver que l'on a : $P(X_n = j) = \frac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

3. On admet que l'espérance de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_n > j)$$

Etablir que : $\mathbf{E}(X_n) \sim_{+\infty} \frac{nk}{k+1}$

EXERCICE 2 — **(ANALYSE).** On rappelle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction arctan.

2. Etablir que :

$$\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

3. Etablir que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

4. Pour tout réel $A > 1$, on pose :

$$I(A) = \int_1^A \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

a. Etablir que :

$$I(A) = \frac{\pi}{4} - A \arctan\left(\frac{1}{A}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2A^2}{1+A^2}}\right)$$

b. Calculer $L = \lim_{A \rightarrow +\infty} I(A)$

EXERCICE 3 — (ALGÈBRE LINÉAIRE).

CONTEXTE ET NOTATIONS. L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto nP + (1 - X)P' + XP'' \end{aligned}$$

où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On rappelle que :

- $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n , n étant un entier naturel ;
- un polynôme unitaire désigne un polynôme de coefficient dominant égal à 1 ;
- pour un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , $\mathcal{L}(E)$ désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des endomorphismes de E ;
- lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$, on notera $\text{Ker}(f)$ le noyau de f , et $\text{Im}(f)$ son image ;
- on utilisera l'abréviation “sev” pour “sous-espace vectoriel”.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie seulement, on suppose $n = 2$

On étudie donc, dans cette partie, l'application :

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto 2P + (1 - X)P' + XP'' \end{aligned}$$

1. Etablir que l'application f_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau de f_2 , et vérifier que $\text{Ker}(f_2)$ est un sev de dimension 1 de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer l'image de f_2 . Déterminer une base de $\text{Im}(f_2)$, et en déduire sa dimension.
4. Démontrer que :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Ker}(f_2) \oplus \text{Im}(f_2)$$

5. L'endomorphisme f_2 est-il un projecteur de $\mathbb{R}_2[X]$?

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on revient au cas général où n désigne un entier naturel ≥ 2 .

On admet que $f_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

6. Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \deg(f_n(X^k)) = k$$

7. En déduire que la famille :

$$\mathcal{F}_1 = \{f_n(1), f_n(X), \dots, f_n(X^{n-1})\}$$

est libre.

8. Justifier que la famille $\mathcal{F}_1$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

9. Etablir que la famille :

$$\mathcal{F}_2 = \{f_n(1), f_n(X), \dots, f_n(X^{n-1}), f_n(X^n)\}$$

est liée.

10. A l'aide des questions 8 et 9, établir que :

a. $\text{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$;

b. il existe un unique polynôme U_n unitaire et de degré n dans $\text{Ker}(f_n)$.

11. Justifier que :

$$\dim(\text{Ker}(f_n)) \geq 1$$

12. Etablir que :

$$\text{Ker}(f_n) = \text{Vect}(U_n)$$

13. Etablir que :

$$\mathbb{R}_n[X] = \text{Ker}(f_n) \oplus \text{Im}(f_n)$$

EXERCICE 4 — (DÉRIVATION ET POLYNÔMES).

NOTATIONS. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout réel x :

$$\Phi_n(x) = x^n e^{-x} \quad \text{et} \quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \Phi_n^{(n)}(x)$$

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on notera :

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n(f(x))}{dx^n}$$

la valeur de la dérivée n -ème de f en x .

1. Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{d^k(x^n)}{dx^k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

2. Calculer L_0 , L_1 et L_2 .

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

3. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n . Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que pour tout réel x :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{n,k} x^k$$

4. Pour tout nombre réel x , exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L'_n(x)$.

5. Soit x un nombre réel. Justifier brièvement que :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{d^{n+1}(x\Phi_n(x))}{dx^{n+1}}$$

6. Soit x un nombre réel. A l'aide de la question précédente, établir que :

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x)$$

7. Soit x un nombre réel. Etablir que :

$$\Phi_{n+1}'(x) = (n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x)$$

8. Soit x un nombre réel. A l'aide de la question précédente et de l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{d^{n+1}(\Phi_{n+1}'(x))}{dx^{n+1}}$$

que l'on pourra utiliser sans démonstration, établir que :

$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)$$

9. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle :

$$ny(x) + (1-x)y'(x) + xy''(x) = 0$$

10. En déduire qu'il existe un réel non nul α tel que $L_n = \alpha U_n$, où U_n est le polynôme introduit dans la question 10-b de l'exercice 3.