CONCOURS BLANC JUIN 2023

Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Exercice 1 — (Probabilités). Soit $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^m \right] = \frac{1}{m+1}$$

Soient k et n dans de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.

On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

1. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

D'après l'énoncé : $X_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

2. Soit $j \in J$. Calculer $P(X_n \leqslant j)$, et prouver que l'on a : $P(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

L'évènement $X_n \leqslant j$ est réalisé si et seulement si un entier $\leqslant j$ est obtenu lors de chaque tirage. Or la probabilité d'obtenir un entier $\leqslant j$ lors d'un tirage est j/n. Puisque les tirages sont indépendants, on en déduit que : $P(X_n \leqslant j) = \left(\dfrac{j}{n} \right)^k$.

Par ailleurs : $P(X_n = j) = P(X_n \leqslant j) - P(X_n \leqslant j-1)$. D'après le calcul précédent, on en déduit que :

$$P(X_n = j) = \left(\frac{j}{n} \right)^k - \left(\frac{j-1}{n} \right)^k$$

Conclusion. $\forall j \in [\![1, n]\!], \quad P(X_n \leqslant j) = \dfrac{j^k}{n^k}$ et $P(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

3. On admet que l'espérance de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_n > j)$$

Etablir que : $\quad \mathbf{E}(X_n) \sim_{+\infty} \dfrac{nk}{k+1}$

D'après l'indication de l'énoncé et la question précédente, on a :

$$\mathbf{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X_n > j) = \sum_{j=0}^{n-1} [1 - P(X_n \leqslant j)] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \frac{j^k}{n^k} \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[1 - \left(\frac{j}{n} \right)^k \right]$$

Il s'ensuit que :

$$\mathbf{E}\left(X_n\right)=\sum_{j=0}^{n-1}1-\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^k=n-n\times\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^k$$

D'après l'indication de l'énoncé, on en déduit que : $\mathbf{E}\left(X_n\right)\sim_{+\infty}n\left(1-\dfrac{1}{k+1}\right)$

Conclusion. $\mathbf{E}\left(X_n\right)\sim_{+\infty}\dfrac{nk}{k+1}$

Exercice 2 — $\boxed{\textbf{(Analyse).}}$ On rappelle que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\ ]-1,1[\,,\qquad \frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o\left(x^n\right)$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction arctan.

D'après l'indication de l'énoncé : $\dfrac{1}{1+x}=1-x+o(x)$

Par changement de variable : $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+o(x^2)$

En observant que arctan est la primitive de $x\longmapsto(1+x^2)^{-1}$ qui s'annule en 0, on obtient :

$$\arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

2. Etablir que :

$$\frac{1}{t}-\arctan\left(\frac{1}{t}\right)=O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

D'après la question précédente :

$$\frac{1}{t}-\arctan\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{3t^3}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

D'où : $\dfrac{1}{t}-\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)\sim_{+\infty}\dfrac{1}{3t^3}$. En particulier : $\dfrac{1}{t}-\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$

3. Etablir que :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \arctan(t)+\arctan\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\pi}{2}$$

C'est une question de cours de cette année... On pose pour tout $t>0$: $f(t)=\arctan(t)+\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

On vérifie alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (TG), que f' est nulle (petit calcul) : on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, égale par exemple à $f(1)=\dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion. $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad \arctan(t)+\arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

4. Pour tout réel $A > 1$, on pose :

$$I(A) = \int_1^A \frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

a. Etablir que :

$$I(A) = \frac{\pi}{4} - A\arctan\left(\frac{1}{A}\right) + \ln\left(\sqrt{\frac{2A^2}{1+A^2}}\right)$$

D'après la question précédente on a :

$$I(A) = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{\pi}{2} + \arctan(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t} - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t + \int_1^A \arctan(t)\,\mathrm{d}t$$

Par suite* : $I(A) = \ln(A) - \dfrac{\pi}{2}(A-1) + \left[t\arctan(t) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_1^A$

$\Longleftrightarrow I(A) = \ln(A) - \dfrac{\pi}{2}(A-1) + A\arctan(A) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+A^2\right) - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$

$\Longleftrightarrow I(A) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2A^2}{1+A^2}}\right) + \dfrac{\pi}{4} + A\left(\arctan(A) - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Conclusion. $I(A) = \dfrac{\pi}{4} - A\arctan\left(\dfrac{1}{A}\right) + \ln\left(\sqrt{\dfrac{2A^2}{1+A^2}}\right)$

b. Calculer $L = \lim\limits_{A\to+\infty} I(A)$

D'une part : $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln\left(\sqrt{\dfrac{2A^2}{1+A^2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2)$ (banal)

D'autre part : $\lim\limits_{A\to+\infty} A\arctan\left(\dfrac{1}{A}\right) = 1$ (équivalent usuel)

Conclusion. $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = \dfrac{\pi}{4} - 1 + \dfrac{1}{2}\ln(2) = \dfrac{\pi + 2\ln(2) - 4}{4}$

*. En retrouvant grâce à une IPP une primitive de arctan.

Exercice 3 — (Algèbre linéaire).

Contexte et notations. L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & nP + (1-X)P' + XP'' \end{array}$$

où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On rappelle que :

- $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, n étant un entier naturel ;
- un polynôme unitaire désigne un polynôme de coefficient dominant égal à 1 ;
- pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, $\mathscr{L}(E)$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des endomorphismes de E ;
- lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$, on notera $\text{Ker}(f)$ le noyau de f, et $\text{Im}(f)$ son image ;
- on utilisera l'abréviation "sev" pour "sous-espace vectoriel".

Première partie

Dans cette partie seulement, on suppose $n = 2$

On étudie donc, dans cette partie, l'application :

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & 2P + (1-X)P' + XP'' \end{array}$$

1. Etablir que l'application f_2 est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_2[X]$, les propriétés du degré assurent que : $\deg(f_2(P)) \leqslant 2$. L'application f_2 est donc effectivement à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient P et Q dans $\mathbb{R}_2[X]$, λ et μ deux réels. On a :

$f_2(\lambda P + \mu Q) = 2(\lambda P + \mu Q) + (1-X)(\lambda P + \mu Q)' + X(\lambda P + \mu Q)''$

$\Longleftrightarrow f_2(\lambda P + \mu Q) = 2\lambda P + 2\mu Q + (1-X)(\lambda P' + \mu Q') + X(\lambda P'' + \mu Q'')$

$\Longleftrightarrow f_2(\lambda P + \mu Q) = \lambda(2P + (1-X)P' + XP'') + \mu(2Q + (1-X)Q' + XQ'')$

$\Longleftrightarrow f_2(\lambda P + \mu Q) = \lambda f_2(P) + \mu f_2(Q)$

Ainsi : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ f_2(\lambda P + \mu Q) = \lambda f_2(P) + \mu f_2(Q)$.

Conclusion. $f_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$

2. Déterminer le noyau de f_2, et vérifier que $\mathrm{Ker}\,(f_2)$ est un sev de dimension 1 de $\mathbb{R}_2\,[X]$.

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2\,[X]$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker} f_2 \Longleftrightarrow f_2(P) = 0 \Longleftrightarrow 2\left(aX^2 + bX + c\right) + (1 - X)(2aX + b) + 2aX = 0$$
$$\Longleftrightarrow (b + 4a)X + 2c + b = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{b}{4} \text{ et } c = -\frac{b}{2}$$

En résumé : $P \in \mathrm{Ker} f_2 \Longleftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{R},\ P = -\dfrac{b}{4}X^2 + bX - \dfrac{b}{2}$

$$\Longleftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{R},\ P = b\left(-\frac{1}{4}X^2 + X - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{4}X^2 + X - \frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\left(X^2 - 4X + 2\right)$$

Conclusion. $\mathrm{Ker} f_2 = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 4X + 2\right)$; c'est un sev de dimension 1 de $\mathbb{R}_2\,[X]$, car il est engendré par un seul polynôme non nul.

3. Calculer l'image de f_2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f_2)$, et en déduire sa dimension.

D'après le cours :

$$\mathrm{Im} f_2 = \mathrm{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2)\right) = \mathrm{Vect}\left(2, 1 + X, 4X\right) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$$

Conclusion. On en déduit que $\mathrm{Im} f_2 = \mathbb{R}_1[X]$. Une base de $\mathrm{Im} f_2$ est la base canonique $\{1, X\}$, et $\mathrm{Im} f_2$ est donc un sev de dimension 2 de $\mathbb{R}_2\,[X]$.

4. Démontrer que :

$$\mathbb{R}_2\,[X] = \mathrm{Ker}\,(f_2) \bigoplus \mathrm{Im}\,(f_2)$$

D'après les questions précédentes, $\mathrm{Im} f_2$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_2\,[X]$; et $\mathrm{Ker} f_2$ est une droite vectorielle, engendrée par un polynôme $(X^2 - 4X + 2)$ qui n'appartient pas à l'hyperplan $\mathrm{Im} f_2$.

On en déduit d'après le cours que : $\mathbb{R}_2\,[X] = \mathrm{Ker}\,(f_2) \bigoplus \mathrm{Im}\,(f_2)$.

5. L'endomorphisme f_2 est-il un projecteur de $\mathbb{R}_2\,[X]$?

On a : $f(1) = 2$ et $f(f(1)) = f(2) = 4$. Puisque $(f \circ f)\,(1) \neq f(1)$, f n'est pas un projecteur de $\mathbb{R}_2\,[X]$.

Deuxième partie

<u>Dans cette partie, on revient au cas général où n désigne un entier naturel $\geqslant 2$.</u>

On admet que $f_n \in \mathscr{L}\,(\mathbb{R}_n\,[X])$.

6. Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n - 1 \,]\!], \quad \deg\left(f_n\left(X^k\right)\right) = k$$

On a : $f_n(1) = n$ et $f_n(X) = (n - 1)X + 1$.

Puis, pour tout entier $k \in [\![\, 2, n - 1 \,]\!]$ on a : $f_n(X^k) = nX^k + k(1 - X)X^{k-1} + k(k - 1)X^{k-1} = (n - k)X^k + k^2X^{k-1}$.

Donc, pour tout entier $k \in [\![\, 2, n - 1 \,]\!]$ on a : $\deg\left(f_n\left(X^k\right)\right) = k$ (puisque $n - k \neq 0$).

Conclusion. $\forall\, k \in [\![\, 0, n - 1 \,]\!], \quad \deg\left(f_n\left(X^k\right)\right) = k$

7. En déduire que la famille :

$$\mathscr{F}_1 = \{f_n(1), f_n(X), \dots, f_n(X^{n-1})\}$$

est libre.

D'après la question précédente, la famille $\mathscr{F}_1$ est une famille échelonnée de polynômes non nuls ; à ce titre, la famille $\mathscr{F}_1$ est libre.

8. Justifier que la famille $\mathscr{F}_1$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après la question 6, la famille $\mathscr{F}_1$ est constituée de polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

D'après la question 7, la famille $\mathscr{F}_1$ est libre.

En outre, le cardinal de $\mathscr{F}_1$ est égal à n, qui est justement la dimension de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Conclusion. La famille $\mathscr{F}_1$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

9. Etablir que la famille :

$$\mathscr{F}_2 = \{f_n(1), f_n(X), \dots, f_n(X^{n-1}), f_n(X^n)\}$$

est liée.

D'après les calculs de la question 6, on a : $f_n(X^n) = n^2 X^{n-1}$.

Ainsi : $f_n(X^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où : $f_n(X^n) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1)$ d'après la question précédente.

Explicitement : $f_n(X^n) \in \mathrm{Vect}(f_n(1), f_n(X), \dots, f_n(X^{n-1}))$.

Conclusion. La famille $\mathscr{F}_2 = \{f_n(1), f_n(X), \dots, f_n(X^{n-1}), f_n(X^n)\}$ est liée.

10. A l'aide des questions 8 et 9, établir que :

a. $\mathrm{Im}(f_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$;

D'après le cours : $\mathrm{Im} f_n = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_2)$.

On en déduit, avec la question précédente : $\mathrm{Im} f_n = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}_1)$.

Conclusion. On en déduit, avec la question 8 : $\mathrm{Im} f_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b. il existe un unique polynôme U_n unitaire et de degré n dans $\mathrm{Ker}(f_n)$.

Existence. D'après la question 9, $f_n(X^n) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Puisque $\mathscr{F}_1$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\exists!\ (a_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]} \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(X^n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_n(X^k)$$

Par linéarité, on en déduit que : $f_n\left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k\right) = 0$.

Le polynôme $U_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ convient.

Unicité. Supposons qu'il existe 2 polynômes U_n et T_n unitaires et de degré n dans $\mathrm{Ker}\,(f_n)$.

Alors on peut écrire : $U_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et $T_n = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$.

Puisque ces deux polynômes sont dans $\mathrm{Ker} f_n$, on a :

$f_n\,(U_n) = 0 \Longleftrightarrow f_n(X^n) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k f(X^k)$ et $f_n\,(T_n) = 0 \Longleftrightarrow f_n(X^n) = -\sum_{k=0}^{n-1} b_k f(X^k)$.

Les scalaires $(-a_k)_{k\in [\![0,n-1]\!]}$ sont les coordonnées de $f_n(X^n)$ dans la base $\mathscr{F}_1$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Les scalaires $(-b_k)_{k\in [\![0,n-1]\!]}$ sont les coordonnées de $f_n(X^n)$ dans la base $\mathscr{F}_1$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on en déduit : $U_n = T_n$.

11. Justifier que :

$$\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f_n)) \geqslant 1$$

D'après la question précédente, $\mathrm{Ker} f_n$ contient un vecteur non nul. D'où : $\dim\,(\mathrm{Ker}\,(f_n)) \geqslant 1$.

12. Etablir que :

$$\mathrm{Ker}\,(f_n) = \mathrm{Vect}\,(U_n)$$

<u>Supposons que $\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n)) \geqslant 2$</u>. Alors, d'après le T4D, on a :

$$\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n) \cap \mathrm{Im}(f_n)) = \underbrace{\dim \mathrm{Ker}(f_n)}_{\geqslant 2} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(f_n)}_{=n-1} - \underbrace{\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n) + \mathrm{Im}(f_n))}_{\leqslant n}$$

D'où :

$$\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n) \cap \mathrm{Im}(f_n)) \geqslant 1$$

On en déduit alors qu'il existe un polynôme non nul P_n dans $\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n) \cap \mathrm{Im}(f_n))$.

Ainsi le polynôme P_n est de degré $(n-1)$ (car il est dans l'image de f_n), et $f_n(P_n) = 0$.

Or il résulte des questions précédentes que $f_{n|\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; ce qui implique que le polynôme P_n est nul : contradiction.

Il s'ensuit que $\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n)) < 2$. Or on a également : $\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n)) \geqslant 1$ (question 11).

Donc : $\dim\,(\mathrm{Ker}(f_n)) = 1$. Puisque U_n est un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(f_n)$, la famille $\{U_n\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_n)$.

CONCLUSION. $\mathrm{Ker}\,(f_n) = \mathrm{Vect}\,(U_n)$.

13. Etablir que :

$$\mathbb{R}_n\,[X] = \mathrm{Ker}\,(f_n) \bigoplus \mathrm{Im}\,(f_n)$$

D'après les questions précédentes, $\mathrm{Im} f_n$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n\,[X]$; et $\mathrm{Ker} f_n$ est une droite vectorielle, engendrée par un polynôme (U_n) qui n'appartient pas à l'hyperplan $\mathrm{Im} f_n$.

On en déduit d'après le cours que : $\mathbb{R}_n\,[X] = \mathrm{Ker}\,(f_n) \bigoplus \mathrm{Im}\,(f_n)$.

Exercice 4 — **(Dérivation et polynômes).**

Notations. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout réel x :

$$\Phi_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\,\Phi_n^{(n)}(x)$$

Pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on notera : $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n(f(x))}{\mathrm{d}x^n}$ la valeur de la dérivée n-ème de f en x.

1. Soit n un entier naturel. Etablir que :

$$\forall\, k \in [\![\, 0, n \,]\!], \qquad \frac{\mathrm{d}^k\,(x^n)}{\mathrm{d}x^k} = \frac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}$$

Par récurrence finie (vue en cours cette année, comme unique exemple d'une telle récurrence d'ailleurs !).

2. Calculer L_0, L_1 et L_2.

Soit x un réel.

$$L_0(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{0!}\,\Phi_0^{(0)}(x) = 1$$

$$L_1(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1!}\,\Phi_1^{(1)}(x) = \mathrm{e}^x \times \frac{\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x \times (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} = 1 - x$$

$$L_2(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2!}\,\Phi_2^{(2)}(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2} \times \frac{\mathrm{d}^2(x^2\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{e}^x \times \left(x^2 - 4x + 2\right)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

Conclusion. $L_0 = 1\,;\quad L_1 = 1 - X \quad \text{et} \quad L_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - 2X + 1$

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

3. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n. Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que pour tout réel x :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k$$

Soient x un réel et n un entier naturel. On a, selon la formule de Leibniz :

$$\Phi_n^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n(x^n\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k(\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}(x^n)}{\mathrm{d}x^{n-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-x}\frac{n!}{k!}\,x^k = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}\,x^k$$

On en déduit que : $L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\underbrace{(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{k!}}_{=c_{n,k}}\,x^k$

Conclusion. Pour tout entier naturel n, la fonction L_n est polynomiale de degré n.

4. Pour tout nombre réel x, exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L'_n(x)$.

Soit x un réel. On a : $\Phi_n^{(n)}(x) = n! \times \mathrm{e}^{-x} L_n(x)$ (énoncé).

D'où : $\Phi_n^{(n+1)}(x) = n! \times \mathrm{e}^{-x} \left(L'_n(x) - L_n x\right)$

Conclusion. $\Phi_n^{(n)}(x) = n! \times \mathrm{e}^{-x} L_n(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x) = n! \times \mathrm{e}^{-x} \left(L'_n(x) - L_n(x)\right)$

5. Soit x un nombre réel. Justifier brièvement que :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}\left(x\Phi_n(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

Pour tout réel x, on a par définition :

$$\Phi_{n+1}(x) = x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} = x x^n \mathrm{e}^{-x} = x\Phi_n(x)$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}\left(x\Phi_n(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$

6. Soit x un nombre réel. A l'aide de la question précédente, établir que :

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} {L_n}'(x)$$

Soit x un réel. Via une nouvelle application de la formule de Leibniz, on obtient à partir de la question précédente :

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}\left(x\Phi_n(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}} = x\Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1)\Phi_n^{(n)}(x)$$

On en déduit, d'après la question 4, que :

$$(n+1)! \times \mathrm{e}^{-x} L_{n+1}(x) = n! x \times \mathrm{e}^{-x}\left(L'_n(x) - L_n(x)\right) + (n+1)n! \times \mathrm{e}^{-x} L_n(x)$$

Par suite :

$$(n+1)! L_{n+1}(x) = n! x\left(L'_n(x) - L_n(x)\right) + (n+1)! L_n(x)$$

D'où :

$$(n+1)! L_{n+1}(x) = ((n+1)! - n! x) L_n(x) + n! x L'_n(x)$$

Soit finalement :

$$L_{n+1}(x) = (1 - \frac{x}{n+1}) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L'_n(x)$$

7. Soit x un nombre réel. Etablir que :

$${\Phi_{n+1}}'(x) = (n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x)$$

Soit x un réel. On a :

$${\Phi_{n+1}}'(x) = \frac{\mathrm{d}\left(x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{d}x} = (n+1)x^n\mathrm{e}^{-x} - x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} = (n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x)$$

8. Soit x un nombre réel. A l'aide de la question précédente et de l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}\left(\Phi_{n+1}{}'(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

que l'on pourra utiliser sans démonstration, établir que :

$$L_{n+1}{}'(x) = L_n{}'(x) - L_n(x)$$

Soit x un réel. On a selon l'énoncé :

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}\left(\Phi_{n+1}{}'(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

Or d'après la question précédente :

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}\left(\Phi_{n+1}{}'(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}} = \frac{\mathrm{d}^{n+1}\left((n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x)\right)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

$$\iff (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$$

En résumé, on a établi que :

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x)$$

D'après la question 4, on en déduit que :

$$(n+1)! \times \mathrm{e}^{-x}\left(L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x)\right) = (n+1)n! \times \mathrm{e}^{-x}\left(L'_n(x) - L_n(x)\right) - (n+1)! \times \mathrm{e}^{-x} L_{n+1}(x)$$

$$\iff L'_{n+1}(x) - L_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x)$$

$$\iff L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x)$$

9. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle :

$$ny(x) + (1-x)y'(x) + xy''(x) = 0$$

Soit x un nombre réel. D'après la question 6, on a :

$$L_{n+1}(x) = (1 - \frac{x}{n+1})L_n(x) + \frac{x}{n+1}L'_n(x)$$

En dérivant terme à terme cette relation, on obtient :

$$L'_{n+1}(x) = (1 - \frac{x}{n+1})L'_n(x) - \frac{1}{n+1}L_n(x) + \frac{1}{n+1}L'_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x)$$

D'où en regroupant les termes qui peuvent l'être :

$$L'_{n+1}(x) = (\frac{n+2-x}{n+1})L'_n(x) - \frac{1}{n+1}L_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x)$$

D'après la question précédente, on en déduit que :

$$L'_n(x) - L_n(x) = (\frac{n+2-x}{n+1})L'_n(x) - \frac{1}{n+1}L_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x)$$

soit :

$$(\frac{n+2-x}{n+1} - 1)L'_n(x) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x) = 0$$

soit :

$$\frac{1-x}{n+1}L'_n(x) + \frac{n}{n+1}L_n(x) + \frac{x}{n+1}L''_n(x) = 0$$

Finalement :

$$(1-x)L'_n(x) + nL_n(x) + xL''_n(x) = 0$$

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad nL_n(x)(1-x)L'_n(x) + xL''_n(x) = 0$. La fonction polynomiale L_n est donc solution de l'équation différentielle : $ny(x) + (1-x)y'(x) + xy''(x) = 0$.

10. En déduire qu'il existe un réel non nul α tel que $L_n = \alpha U_n$, où U_n est le polynôme introduit dans la question 10-b de l'exercice 3.

D'après la question 3, $L_n \in \mathbb{R}_n[X]$, et plus précisément : $\deg(L_n) = n$.

D'après la question précédente : $L_n \in \mathrm{Ker} f_n$, où f_n est l'endomorphisme de l'exo 3.

D'après la question 12 de l'exo 3 : $\mathrm{Ker} f_n = \mathrm{Vect}(U_n)$.

On en déduit que : $L_n \in \mathrm{Vect}(U_n)$.

Puisqu'en outre $L_n \neq 0$ (son degré est égal à n), on en déduit qu'il existe un réel non nul α tel que $L_n = \alpha U_n$.