Exercices 27 — Applications linéaires en dimension finie

Rang d'une application linéaire

Exercice 1. — 1/ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x+y, x-y) \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2, \mathbb{K}^3)$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

On a : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1),(0,1,-1)\right)$. Donc $\mathrm{im}(f)$ est engendré par deux vecteurs clairement non colinéaires. Donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) = 2$.

Conclusion. $\mathrm{rg}(f) = 2$.

2/ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P - X^2P'' \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

On a : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$.

Donc : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(1, X, -X^2, -5X^3) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \mathbb{R}_3[X]$.

Conclusion. $\mathrm{rg}(f) = 4$.

3/ Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{array}$. On admet que $f \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$. Déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

On a : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(f(E_{11}), f(E_{12}), f(E_{21}), f(E_{22}))$. Donc :

$$\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(-E_{22}, E_{12}, E_{21}, -E_{11}) = \mathrm{Vect}(E_{22}, E_{12}, E_{21}, E_{11}) = \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$$

Conclusion. $\mathrm{rg}(f) = 4$.

Exercice 2. — **(Forme linéaire)**.

1/ **Exemple 1**. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y+z \end{array}$. On admet que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

Tout réel x admet un antécédent par f (par ex : $(x,0,0)$). Donc : $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. Donc : $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Clairement : $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left((1,0,-1),(0,1,-1)\right)$ et $\dim(\ker(f)) = 2$.

2/ **Exemple 2**. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & P''(1) \end{array}$. On admet que f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_3[X]$.

Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

Tout réel x admet un antécédent par f (par ex : $P = xX^3/6$). Donc : $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. Donc : $\mathrm{rg}(f) = 1$.

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_3[X]$ en 1, on a : $\ker(f) = \mathrm{Vect}\,(1, (X-1), (X-1)^3)$. D'où : $\dim(\ker(f)) = 3$.

3/ **Exemple 3**. Soit f l'application définie en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K}),\ f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a + b + c + d$$

On admet que f est une forme linéaire sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Déterminer le rang de f ; puis déterminer le noyau de f (base et dimension).

Tout réel x admet un antécédent par f (par ex : xE_{11}). Donc : $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$. Donc : $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Clairement : $\ker(f) = \mathrm{Vect}\,(E_{11} - E_{22}, E_{12} - E_{22}, E_{21} - E_{22})$. On montre aisément que cette famille est libre, d'où : $\dim(\ker(f)) = 3$.

Exercice 3. — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f\,(x, y) = (x - y, y - x, 0)$.

1/ Montrer sans faire de calcul que f n'est pas surjective.

D'après le cours : $\mathrm{rg}(f) \leqslant \min(2, 3)$. D'où : $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$. Par conséquent : $\mathrm{im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$ (en particulier $\mathrm{im}(f) \neq \mathbb{R}^3$).

Conclusion. f n'est pas surjective.

OU $(1, 2, 3) \notin \mathrm{im}(f)$ d'où la conclusion.

2/ Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{im} f$ (dimension et base).

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $(x, y) \in \ker(f) \Longleftrightarrow x = y$.

D'où : $\ker(f) = \mathrm{Vect}\,((1, 1))$. En particulier : $\dim \ker(f) = 1$. *

D'après le théorème du rang, on en déduit que : $\dim \mathrm{im}(f) = 2 - 1 = 1$. Puisqu'il est clair que $(1, -1, 0) \in \mathrm{im}(f)$, on en déduit que : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{Vect}(1, -1, 0)$.

Conclusion. $\ker(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$, engendrée par $(1, 1)$.

Et $\mathrm{im}(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, engendrée par $(1, -1, 0)$.

Exercice 4. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f\,(x, y, z) = (x - y, z)$.

*. $\ker(f)$ étant engendré par un vecteur non nul.

1/ Montrer sans faire de calcul que f n'est pas injective.

D'après le théorème du rang : $\dim\ker(f) = 3 - \operatorname{rg}(f)$. Or $\operatorname{rg}(f) \leqslant 2$ (puisque $\operatorname{im}(f) \subset \mathbb{R}^2$). Donc : $\dim\ker(f) \geqslant 1$. En particulier : $\ker(f) \neq \left\{\overrightarrow{0_{\mathbb{R}^3}}\right\}$.

Conclusion. f n'est pas injective.

2/ Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ (dimension et base).

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a : $(x, y, z) \in \ker(f) \Longleftrightarrow x = y$ et $z = 0$.

D'où : $\ker(f) = \operatorname{Vect}((1, 1, 0))$. En particulier : $\dim\ker(f) = 1$.

D'après le théorème du rang, on en déduit que : $\dim\operatorname{im}(f) = 3 - 1 = 2$. D'où : $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Conclusion. $\ker(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, engendrée par $(1, 1, 0)$; et $\operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5. — Soit n un entier naturel non nul. Montrer[†] que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P + P' - P'' \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ (on pourra admettre que f est linéaire).

D'après l'énoncé, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Il est aisé d'établir que $\ker(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\right\}$, et par suite que f est injectif.[‡]

Puisque f est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut affirmer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion. $f \in \operatorname{GL}(\mathbb{R}_n[X])$.

Exercice 6. — Dans cet exercice, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{2023}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2023.

On note $G = \operatorname{Vect}(X^{450} + X^7 - 1)$ le sev de E engendré par le polynôme $Q = X^{450} + X^7 - 1$.

Enfin, on note F la partie de E suivante : $F = \{P \in E \,/\, P(0) = P(1)\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E. Préciser la dimension de F.

L'application : $\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(0) - P(1) \end{aligned}$ est une application linéaire. Son noyau $\ker f = F$ est un sev de E.

En outre, le théorème du rang permet d'affirmer que : $\dim\ker(f) = \dim(E) - \operatorname{rg}(f)$.

f étant surjective[§], on a $\operatorname{rg}(f) = 1$. Par suite : $\dim\ker(f) = 2023$.

†. En moins de 5 lignes

‡. Je ne dis pas qu'il ne faudrait pas le détailler ; j'observe simplement que la résolution de l'équation polynomiale $P = P'' - P'$ ne doit vous poser aucun problème (revoir les exos du chapitre sur les polynômes sinon).

§. f étant une forme linéaire non nulle.

Conclusion. F est un hyperplan de $\mathbb{R}_{2023}[X]$ (F est un sev de $\mathbb{R}_{2023}[X]$ de dimension 2023).

2) Etablir que $E = F \bigoplus G$.

On vérifie immédiatement que $Q(0) \neq Q(1)$. Donc $Q \notin F$.

Ainsi, F est un hyperplan de E, et Q un élément de $E \backslash F$. D'après le cours : $E = F \bigoplus \text{Vect}(Q)$.

Conclusion. $E = F \bigoplus G$.

3) On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Quel est le rang de p_F ?

Deux applications successives du cours donnent : $\text{rg}(p_F) = \dim \text{im}(p_F) = \dim F$.

Conclusion. $\text{rg}(p_F) = 2023$.

Exercice 7. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$[\text{im}\,(f^2) = \text{im} f] \iff [\ker\,(f^2) = \ker f]$$

On a $\text{im}\,(f^2) \subset \text{im} f \quad (\spadesuit)$ et $\ker f \subset \ker\,(f^2) \quad (\clubsuit)$.

De plus, d'après le théorème du rang[2], on a :

$$\dim\,(\ker f) + \dim(\text{im} f) = \dim E \qquad \text{et} \qquad \dim\,(\ker\,(f^2)) + \dim(\text{im}\,(f^2)) = \dim E$$

D'où :

$$\dim\,(\ker f) - \dim\,(\ker\,(f^2)) = \dim(\text{im}\,(f^2)) - \dim(\text{im} f) \qquad (\heartsuit)$$

Ces observations faites, l'exercice est trivial.

➤ Si $\text{im}\,(f^2) = \text{im} f$, alors on déduit de $(\heartsuit)$ que $\dim\,(\ker f) = \dim\,(\ker\,(f^2))$; puis de cette égalité et de $(\clubsuit)$ que $\ker\,(f^2) = \ker f$. Ce qui prouve l'implication "de gauche à droite".

➤ Si $\ker\,(f^2) = \ker f$, alors on déduit de $(\heartsuit)$ que $\dim\,(\text{im} f) = \dim\,(\text{im}\,(f^2))$; puis de cette égalité et de $(\spadesuit)$ que $\text{im}\,(f^2) = \text{im} f$. Ce qui prouve l'implication "de droite à gauche".

Conclusion. Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$[\text{im}\,(f^2) = \text{im} f] \iff [\ker\,(f^2) = \ker f]$$

Exercice 8. — Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Montrer que :

$$[E = \ker f \bigoplus \text{im} f] \iff [E = \ker f + \text{im} f]$$

Supposons que $E = \ker f + \text{im} f$.

D'après le théorème des quatre dimensions, on a : $\dim(\ker f + \text{im} f) = \dim \ker f + \dim \text{im} f - \dim(\ker f \cap \text{im} f)$.

On en déduit, avec l'hypothèse, que :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \text{im} f - \dim(\ker f \cap \text{im} f) \qquad (\spadesuit)$$

Or, d'après le théorème du rang, on a :

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \text{im} f \qquad (\clubsuit)$$

On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que :

$$\dim(\ker f \cap \mathrm{im} f) = 0$$

Par suite : $\ker f \cap \mathrm{im} f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$.

Ainsi : $E = \ker f + \mathrm{im} f$ et $\ker f \cap \mathrm{im} f = \left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$. D'où : $E = \ker f \bigoplus \mathrm{im} f$.

On a donc établi l'implication :

$$[E = \ker f + \mathrm{im} f] \Longrightarrow [E = \ker f \bigoplus \mathrm{im} f]$$

L'implication réciproque est triviale.

Conclusion. Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$[E = \ker f \bigoplus \mathrm{im} f] \Longleftrightarrow [E = \ker f + \mathrm{im} f]$$

Exercice 9. — Soit n un entier naturel non nul. On note $E = \mathbb{K}_{2n+1}[X]$.
A tout polynôme P de E, on associe l'élément noté $f(P)$ de $\mathbb{K}^{2n+2}$ défini par :

$$f(P) = (P(0), P(1), \ldots, P(n), P'(0), P'(1), \ldots, P'(n))$$

Etablir qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \ldots, 2n+2)$$

Réflexe : "Etablir qu'il existe un unique..." $\longrightarrow$ Penser "bijection" !

Plus formellement, on introduit l'application f :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{K}_{2n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{2n+2} \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), \ldots, P(n), P'(0), P'(1), \ldots, P'(n)) \end{array}$$

L'application f est linéaire. On peut également observer que : $\dim \mathbb{K}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{K}^{2n+2} = 2n+2$.

Montrons que f est injective. Soit $P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X]$, tel que $f(P) = 0_{\mathbb{K}^{2n+2}}$. Alors P admet 0, 1,..., n comme racines de multiplicité au moins 2. On en déduit que :

$$\underbrace{X^2(X-1)^2 \ldots (X-n)^2}_{S} \text{ divise } P$$

Or $\deg S = 2n+2$ tandis que $\deg P \leqslant 2n+1$. On en déduit que P est nul.

Ainsi : $\forall\, P \in \mathbb{K}_{2n+1}[X],\ f(P) = 0_{\mathbb{K}^{2n+2}} \Longrightarrow P = 0_{\mathbb{K}_{2n+1}[X]}$. Donc f est injective.

Puisque f est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, f est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{2n+1}[X]$ dans $\mathbb{K}^{2n+2}$.

En particulier f est bijective, et tout vecteur de $\mathbb{K}^{2n+2}$ admet donc un unique antécédent par f.

Conclusion. Le vecteur $(1, 2, \ldots, 2n+2)$ admet un unique antécédent par f. En d'autres termes, il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$f(Q) = (1, 2, \ldots, 2n+2)$$

Exercice 10. — (e3a MP 2017). Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère les applications

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad P \longmapsto P - P' \qquad \text{et} \qquad \Delta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \quad P \longmapsto P'$$

On admet que φ et Δ sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

1/ Déterminer le rang de Δ.

2/ Etablir que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3/ A l'aide de la question précédente :

a/ Etablir qu'il existe une unique famille de polynômes S_0, S_1,..., S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\forall\, i \in [\![\, 0, n \,]\!],\ \varphi(S_i) = \frac{1}{i!}\, X^i$$

b/ Etablir que la famille $\mathscr{B} = \{S_0, \ldots, S_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4/ Dans cette question, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$. Etablir que :

$$(\mathrm{id} - \Delta) \circ (\mathrm{id} + \Delta + \cdots + \Delta^n) = \mathrm{id}$$

5/ En déduire l'expression de S_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![\, 0, n \,]\!]$.

Corrigé

1) L'endomorphisme Δ a pour noyau le sev des polynômes constants, càd : $\ker(\Delta) = \mathrm{Vect}\left(\widetilde{1}\right)$. D'après le théorème du rang, on a : $\mathrm{rg}(\Delta) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \ker(\Delta) = n + 1 - 1$. Par suite : $\boxed{\mathrm{rg}(\Delta) = n}$.

2) Le noyau de φ est le sev de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes P tels que : $P = P'$. Or il existe un unique polynôme satisfaisant cette condition : le polynôme nul. Il s'ensuit que : $\ker(\varphi) = \{0\}$. Donc φ est un endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie ; à ce titre, $\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$.

3) a) Soit n un entier naturel compris entre 0 et n. Puisque φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, le polynôme $\dfrac{1}{i!}\, X^i$ (qui est dans $\mathbb{R}_n[X]$) admet un unique antécédent par φ, que l'on peut convenir de noter S_i.

$$\boxed{\textbf{Conclusion}.\ \forall\, i \in [\![\, 0, n \,]\!],\ \exists!\, S_i \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(S_i) = \frac{1}{i!}\, X^i}$$

b) La famille $\mathscr{F} = \left(1, X, \ldots, \dfrac{1}{i!}\, X^i, \ldots, \dfrac{1}{n!}\, X^n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (à des constantes multiplicatives non nulles près, ses éléments sont ceux de la base canonique). Or, par définition des polynômes S_i, on a : $S_i = \varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{i!}\, X^i\right)$.

La famille $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ est donc l'image par φ^{-1} de $\mathscr{F}$. Puisque $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que φ^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que : $\boxed{\varphi^{-1}(\mathscr{F}) = (S_0, S_1, \ldots, S_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

4) Puisque les endomorphismes id et Δ commutent, on a :

$$(\mathrm{id}-\Delta)\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\Delta^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k-\sum_{k=0}^{n}\Delta^{k+1}=\mathrm{id}+\sum_{k=1}^{n}\Delta^k-\sum_{k=1}^{n}\Delta^k-\Delta^{n+1}=\mathrm{id}-\Delta^{n+1}\quad(\spadesuit).$$

Or $\Delta^{n+1}=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])}$, puisque tout polynôme de degré au plus n a une dérivée $(n+1)$-ème identiquement nulle.

On déduit de cette observation et de $(\spadesuit)$ que : $\boxed{(\mathrm{id}-\Delta)\circ\left(\sum_{k=0}^{n}\Delta^k\right)=\mathrm{id}}$.

5) Observons que : $\varphi=\mathrm{id}-\Delta$. D'après la question précédente, on a donc : $\varphi^{-1}=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k$. Il s'ensuit que :

$$\forall i\in[\![\,0,n\,]\!],\ S_i=\varphi^{-1}\left(\frac{1}{i!}X^i\right)=\sum_{k=0}^{n}\Delta^k\left(\frac{1}{i!}X^i\right)\quad(\spadesuit)$$

Soit i un entier naturel compris entre 0 et n. On a : $\Delta^k\left(X^i\right)=\begin{cases}\dfrac{i!}{(i-k)!}X^{i-k}\text{ si }k\in[\![\,0,i\,]\!]\\[2ex] 0\text{ si }k>i\end{cases}$

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\Delta^k\left(\frac{1}{i!}X^i\right)=\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{(i-k)!}X^{i-k}=\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{k!}X^k\quad(\clubsuit)$.

D'après $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$: $\boxed{\forall i\in[\![\,0,n\,]\!],\ S_i=\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{k!}X^k}$.

Exercice 11. — On considère l'application : $F:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}^3\\ P&\longmapsto&\left(P(1),P(0),P'(0)\right)\end{array}$

On admet que F est linéaire.

1/ Ecrire la matrice de F dans les bases canoniques B et B' de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

On a : $F(1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$; $F(X)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $F(X^2)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

La matrice de F dans les bases canoniques B et B' de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement est donc :

$$M_{B,B'}(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

2/ Déterminer l'image de F, puis le rang de F.

Les trois vecteurs $F(1)$, $F(X)$ et $F(X^2)$ (les trois colonnes de la matrice ci-dessus) sont clairement non coplanaires, donc engendrent $\mathbb{R}^3$.

Conclusion. $\mathrm{im}F=\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{rg}F=3$.

3/ A l'aide de la question précédente, déterminer le noyau de F. Qu'en déduire pour l'application F ?

D'après le théorème du rang :

$$\dim \ker f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \mathrm{rg} f \Longleftrightarrow \dim \ker f = 0 \Longleftrightarrow \ker f = \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$$

On en déduit que l'application F est injective. Puisque de plus F est surjective d'après la question précédente, on peut conclure.

Conclusion. F est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. — On considère l'endomorphisme : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}_3[X]$.

On a $f(1) = 0$; $f(X) = 1$; $f(X^2) = 2X$; $f(X^3) = 3X^2$.

On en déduit que la matrice de f dans la base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. Très prochainement, nous définirons la notion de **rang d'une matrice**. Cette quantité sera définie comme la dimension du sev engendré par les colonnes de la matrice. Une propriété du cours fait le lien avec la notion de rang d'une application, explicitement : le rang de f est égal au rang de la matrice $M_{B,B'}(f)$ (indépendamment des bases B et B' choisies).

Dans l'exemple de cet exercice, il est très clair que le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes de la matrice $M_B(f)$ est égal à 3. On pourra donc en déduire que le rang de f est égal à 3 (sans calcul d'image).

Pour être encore plus explicite, et insister sur le gain de temps réalisé avec cette toute nouvelle notion, la seule écriture de la matrice $M_B(f)$ permet ici de déterminer la dimension de l'image, et celle de la dimension du noyau avec le théorème du rang (sans aucun autre calcul).

Exercice 13. — On considère l'application linéaire : $\begin{aligned} f : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) &\longmapsto (x+y-z, y-z-t, x-z) \end{aligned}$

Ecrire sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

Notons $B = (\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \mathrm{e}_4)$ et $B' = (\mathrm{e'}_1, \mathrm{e'}_2, \mathrm{e'}_3)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

On a :

$$f(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e'}_1 + \mathrm{e'}_3\,; \qquad f(\mathrm{e}_2) = \mathrm{e'}_1 + \mathrm{e'}_2\,; \qquad f(\mathrm{e}_3) = -\mathrm{e'}_1 - \mathrm{e'}_2 - \mathrm{e'}_3\,; \qquad f(\mathrm{e}_4) = -\mathrm{e'}_2$$

D'où :

$$M_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. Pour continuer à anticiper sur la suite du cours, le rang de cette matrice est égal à 3. En effet, les colonnes 2 et 4 de la matrice ci-dessus engendrent le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z = 0$ car ce sont deux vecteurs non colinéaires de celui-ci ; et la première colonne n'est clairement pas contenue dans ce plan. En résumé, les colonnes 1, 2 et 4 correspondent à trois vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$; elles constituent donc une base de $\mathbb{R}^3$.

On en déduit que le rang de f est égal à 3, et d'après le théorème du rang, que la dimension du noyau de f est égal à 1.

Exercice 14. — On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - 2y + 4z, y + 3z, z) \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

On a :

$$f(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e'}_1 \,; \qquad f(\mathrm{e}_2) = -2\mathrm{e'}_1 + \mathrm{e'}_2 \,; \qquad f(\mathrm{e}_3) = 4\mathrm{e'}_1 + 3\mathrm{e'}_2 + \mathrm{e'}_3$$

D'où :

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le rang de cette matrice est égal à 3 (les 3 colonnes étant non coplanaires, elles constituent une base de $\mathbb{R}^3$), donc elle est inversible.

On en déduit que le rang de f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. — On considère l'endomorphisme : $f : \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A - \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_2 \end{array}$

Ecrire la matrice de f dans la base canonique $B = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 16. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer "sans calculs" l'image et le noyau de f.

Ce que l'on appelle **l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice** A, c'est l'application (notée f_A dans le cours, définition en haut de la page 192) dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (au départ et à l'arrivée) est la matrice A.

Explicitement, f_A est l'application à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ et définie sur $\mathbb{R}^3$ en posant :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, on a :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -3x-3y+3z \\ 2x+2y-2z \end{pmatrix}$$

Avec cette définition, la première colonne de la matrice A est égale à $f(\mathrm{e}_1)$, la seconde colonne de la matrice A est égale à $f(\mathrm{e}_2)$, et la dernière égale à $f(\mathrm{e}_3)$:

$$f(\mathrm{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad f(\mathrm{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad f(\mathrm{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce complément de cours donné, résolvons l'exercice.

On a : $\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\,(f(\mathrm{e}_1), f(\mathrm{e}_2), f(\mathrm{e}_3))$. Il est clair d'après les explications précédentes que :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

En particulier : $\mathrm{rg} f = 1$.

D'après le théorème du rang : $\dim \ker f = 2$.

Or $\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2$ appartient clairement à $\ker f$, puisque les deux premières colonnes (correspondant à $f(\mathrm{e}_1)$ et à $f(\mathrm{e}_2)$ sont égales). Dans le détail :

$$f(\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2) = f(\mathrm{e}_1) - f(\mathrm{e}_2) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

De même, $\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3$ appartient aussi à $\ker f$.

Puisque les vecteurs $\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2 = (1, -1, 0)$ et $\mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3 = (1, 0, 1)$ appartiennent à $\ker f$, sont non colinéaires, et que $\dim \ker f = 2$, on a :

$$\ker f = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{e}_1 - \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_3) \qquad \text{soit encore :} \qquad \ker f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Conclusion. $\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $\ker f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 17. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A. Déterminer "sans calculs" l'image et le noyau de f.

Même principe que précédemment.

On a :

$$\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

En particulier : $\mathrm{rg} f = 2$.

D'après le théorème du rang : $\dim \ker f = 1$.

Or il est clair que $\mathrm{e}_2 - 2\mathrm{e}_1$ appartient à $\ker f$.

Puisque le vecteur $\mathrm{e}_2 - 2\mathrm{e}_1 = (-2, 1, 0)$ appartient à $\ker f$ (et est non nul), et que $\dim \ker f = 1$, on a :

$$\ker f = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}_2 - 2\mathrm{e}_1\right) \qquad \text{soit encore :} \qquad \ker f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Conclusion. $\mathrm{im} f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\ker f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

Exercice 18. — On considère la matrice $C = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -6\end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ canoniquement associé à la matrice C.

En d'autres termes, C est la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, à savoir $B = (1, X, X^2, X^3)$.

1/ A l'aide de la matrice C, déterminer $g\left(X\right)$, $g\left(X^2\right)$ et $g\left(1+X\right)$.

Les coordonnées de $g(X)$ dans la base B sont données par la deuxième colonne de la matrice C. On en déduit que :

$$g(X) = -3X^3 + X^2 + 2$$

Les coordonnées de $g(X^2)$ dans la base B sont données par la deuxième colonne de la matrice C. On en déduit que :

$$g(X^2) = X^3 + X^2 - X - 3$$

Par linéarité de g, on a $g(1+X) = g(1) + g(X)$. Les coordonnées de $g(1+X)$ dans la base B sont données par la somme des deux premières colonnes de la matrice C. On en déduit que :

$$g(1+X) = -X^3 - X^2 + X + 3$$

2/ Calculer le rang de g.

Puisque $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X^3)$, on a :

$$\mathrm{im} g = \mathrm{Vect}\left(g(1), g(X), g(X^2), g(X^3)\right)$$

D'où :

$$\mathrm{im} g = \mathrm{Vect}\left(2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2, X^3 + X^2 - X - 3, -6X^3 + 2X^2 + 4\right)$$

Il est clair que : $g(X^3) = 2g(X)$ (la quatrième colonne de C est le double de la seconde). Par suite :

$$\mathrm{im} g = \mathrm{Vect}\left(2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2, X^3 + X^2 - X - 3\right)$$

Par ailleurs, d'après la question précédente : $g(X)^2 = -g(1) - g(X)$. Par suite :

$$\mathrm{im} g = \mathrm{Vect}\left(2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2\right)$$

La famille $\{2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2\}$ est génératrice de $\mathrm{im} g$ (trivial), et libre car constituée de deux polynômes non colinéaires. C'est donc une base de $\mathrm{im} g$. On en déduit que :

$$\dim \mathrm{im} g = 2 \qquad \text{c'est à dire :} \qquad \mathrm{rg}(g) = 2$$

3/ Déterminer une base de $\mathrm{im} g$, puis une base de $\ker g$.

D'après la question précédente, $\mathrm{im} g$ est de dimension 2 ;
et une base de $\mathrm{im} g$ est $\{2X^3 - 2X^2 + X + 1, -3X^3 + X^2 + 2\}$.

D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim \ker g = \dim \mathbb{R}_3[X] - \mathrm{rg}(g) = 4 - 2 = 2$$

Or il résulte des observations précédentes que :

$$g(X^3) = 2g(X) \qquad \text{D'où :} \qquad g(X^3 - 2X) = 0 \qquad \text{Càd :} \qquad X^3 - 2X \in \ker g$$

Et :

$$g(X^2) = -g(1 + X) \qquad \text{D'où :} \qquad g(X^2 + X + 1) = 0 \qquad \text{Càd :} \qquad X^2 + X + 1 \in \ker g$$

La famille $\{X^3 - 2X, X^2 + X + 1\}$ est une famille libre de $\ker g$ (car constituée de deux polynômes non colinéaires). En outre, son cardinal est égal à la dimension de $\ker g$. C'est donc une base de $\ker g$.

Exercice 19. — Calculer le rang des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Les colonnes de A constituent une famille $\mathscr{F} = \{(1,3),(2,4)\}$ de deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ non colinéaires. Donc : $\dim \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = 2$. Ce qui signifie : $\mathrm{rg}(A) = 2$.

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on a : $\mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, C_3\right) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_3\right)$.

Les colonnes C_1 et C_3 étant deux vecteurs de $\mathbb{K}^3$ non colinéaires, on a : $\dim \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = 2$. Ce qui signifie : $\mathrm{rg}(A) = 2$.

3/ $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Le rang de A est au plus égal à 2, puisque : $\text{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$ pour toute $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. De fait, il est égal à 2 puisque les deux premières colonnes de A sont deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ non colinéaires.

Ainsi : $\text{rg}(A) = 2$.

Remarque. On peut également faire un copier-coller-adapter du raisonnement de la question précédente pour parvenir à la même conclusion.

Exercice 20. — On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1/ Déterminer le rang de f. En déduire la dimension de $\ker f$.

En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A, on a : $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_3)$ (puisque $C_2 = -2C_1$).

Les colonnes C_1 et C_3 étant deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ non colinéaires, on a : $\dim \text{Vect}(\mathscr{F}) = 2$. Ce qui signifie : $\text{rg}(A) = 2$, et donc $\text{rg}(f) = 2$.

Conclusion. On a $\text{rg}(f) = 2$. On en déduit avec le théorème du rang que : $\dim \ker f = 1$.

2/ Déterminer une base de $\text{im} f$, puis une base de $\ker f$.

D'après la question précente, une base de $\text{im} f$ est $\{C_1, C_3\}$; et $\ker f$ est la droite vectorielle engendrée par $(1, -2, 0)$.

Exercice 21. — On note $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et id l'identité de $\mathbb{R}^3$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour f ?

2/ Déterminer $\ker(f - \text{id})$, ainsi que sa dimension. Vérifier que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ appartient à ce sous-espace vectoriel.

3/ On pose : $\overrightarrow{u_2} = -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{e_3}$. Montrer que $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4/ Déterminer la matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Calculer P^{-1}.

5/ Soit A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

a/ Après avoir rappelé la relation liant les matrices A et A', calculer A'.

b/ Pour tout entier naturel n, déterminer A^n.

Corrigé

(Extrait du concours d'admission ESME – 2001)

1) Le rang de f est le rang de sa matrice dans une base quelconque. D'où :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$\boxed{\textbf{Conclusion} : \mathrm{rg}(f) = 3 \text{ d'où } f \in \mathrm{GL}\,(\mathbb{R}^3)}$

2) La matrice de $f - \mathrm{id}$ dans la base canonique est : $A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notons B cette matrice :

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

D'après le théorème du rang on a : $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = 1}$. Puisqu'il est clair que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, on peut conclure que : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u_1})}$.

3) Soient a, b et c trois réels tels que : $a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0}$. Alors : $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ -2b - c & = & 0 \\ a + b + c & = & 0 \end{array}\right.$. D'où : $a = b = c = 0$.

La famille $\boxed{(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \text{ est donc libre}}$. Puisque son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une $\boxed{\text{base de } \mathbb{R}^3}$.

4) La matrice de passage P de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

En calculant son inverse via la résolution de "$PX = B$", on obtient : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P}$.

5) a) D'après la formule du changement de base : $\boxed{A' = P^{-1}AP \text{ (donc dans la présente situation : } A' = PAP)}$.

Les calculs donnent : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

b) On a : $A' = \mathrm{I}_3 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente d'indice 3. Explicitement, $N^2 = E_{13}$, et $N^k = 0$ pour tout entier $k \geqslant 3$.

Soit n un entier naturel. Puisque I_3 et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour obtenir :

$$A'^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k \qquad \text{d'où : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A'^n = \mathrm{I}_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2}.$$

Exercice 22. — Calculer le rang des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A.

Supposons qu'il existe trois réels x, y et z tels que :

$$xC_1 + yC_2 + zC_3 = 0_{\mathbb{K}^3}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

La famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ étant une famille libre de $\mathbb{K}^3$, elle en est une base.

Il s'ensuit que $\mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3) = \mathbb{K}^3$, d'où : $\mathrm{rg}(A) = 3$.

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

Le rang de A est au plus égal à 3, puisque : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$ pour toute $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. De fait, il est égal à 3 puisque les trois premières colonnes de A constituent une famille libre de $\mathbb{K}^3$ (la preuve de ce fait est rigoureusement analogue à celle de la question précédente).

Ainsi : $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Une nouvelle méthode pour le calcul du rang

Le rang d'une matrice peut en général être deviné facilement lorsque cette matrice est carrée de taille 2 ou 3. Néanmoins, pour des matrices de taille supérieure, ce n'est pas toujours une opération aussi évidente, et il est un peu lourd de systématiquement revenir à la caractérisation de famille libre pour déterminer si les colonnes d'une telle matrice sont liées ou non.

Une méthode alternative pour calculer le rang d'une matrice consiste à rendre cette matrice triangulaire supérieure, exactement comme nous l'avons décrit dans l'algorithme du pivot de Gauss : le rang de la matrice obtenue sera alors égal au nombre de coefficients non nuls sur la "diagonale".

Les opérations laissant invariant le rang d'une matrice sont les suivantes :

- multiplication d'une colonne (ou d'une ligne) par un scalaire non nul ;
- permutation de colonnes (ou de lignes) ;

➢ somme de deux colonnes (ou de deux lignes).

Ci-dessous, quatre exemples illustrant cette méthode :

➢ Exemple 1

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} = 3$

➢ Exemple 2

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 10 & 3 \\ 3 & -8 & 17 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$

➢ Exemple 3

Calculer le rang de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

➢ Exemple 4

Calculer le rang de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & -7 & 7 & -14 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

Exercice 23. — Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

3/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec $\alpha \in \mathbb{K}$)

On a : $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 0 & 1-\alpha & 1-\alpha^2 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha-1 & 1-\alpha \\ 0 & 0 & 2-\alpha-\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 1 \\ 2 \text{ si } \alpha = -2 \\ 3 \text{ si } \alpha \in \mathbb{K}\backslash\{1,-2\} \end{cases}$

4/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ (avec a, b et $c \in \mathbb{K}$)

On a : $\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ bc & ac & ab \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix}$

$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \text{ si } a = b = c \\ 3 \text{ si } a, b, c \text{ 2 à 2 distincts} \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exercice 24. — Soit $m \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & m & 2 \end{pmatrix}$.

1/ Déterminer le rang de M en fonction de m.

2/ Dans cette question, on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice M. On suppose en outre que : $m = 1$.

a/ Préciser le rang de f, ainsi que la dimension du noyau de f.

b/ Déterminer une base de l'image de f, ainsi qu'une base de son noyau.

c/ $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Corrigé

1) Puisque le rang d'une matrice est invariant par opérations élémentaires sur ses lignes[¶] :

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & m-1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ m-1 & 1-m \end{pmatrix} \qquad \text{D'où : } \boxed{\operatorname{rg}(M) = \begin{cases} 3 \text{ si } m = 1 \\ 4 \text{ si } m \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \end{cases}}$$

2) On suppose donc : $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) D'après la question précédente : $\boxed{\operatorname{rg}(f) = 3}$. D'après le théorème du rang : $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(f) = 1}$.

b) On a : $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$ où les C_i désignent les vecteurs colonnes de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Clairement : $C_4 = C_1 + C_2$. D'où : $\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)}$. La famille (C_1, C_2, C_3) étant génératrice de $\operatorname{Im}(f)$ et de cardinal égal à sa dimension, c'en est une base.

On déduit également de la relation $C_4 = C_1 + C_2$ que $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_4) = 0$. D'où $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f)$.

Comme on sait par ailleurs que $\operatorname{Ker}(f)$ est une droite vectorielle (2-a), on peut conclure :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$$

Exercice 25. — (Calcul du rang). Calculer le rang de chacune des matrices suivantes.

1/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4/ $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5/ $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

¶. Et ses colonnes.

6/ $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 7/ $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Quelques exercices de synthèse sur l'algèbre linéaire

Exercice 26. — (Existence d'un polynôme annulateur, question de cours classique).

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et soit u un endomorphisme de u.

Etablir l'existence d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 27. — Soit n un entier naturel $\geqslant 5$. Etablir qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que :

$$P + XP'' = X^n - 5X^4 + 1$$

Exercice 28. — Une propriété des endomorphismes nilpotents. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie non nulle. On note : $n = \dim E$.

Soit f un endomorphisme non nul et nilpotent de E ; on suppose donc qu'il existe un entier naturel $m \geqslant 2$ tel que $f^m = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

L'objectif de cette question est d'établir que : $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1/ Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2/ Montrer qu'il existe un vecteur V de E tel que la famille : $\{V, f(V), f^2(V), \ldots, f^{p-1}(V)\}$ est libre.

Indication : utiliser le fait que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3/ En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Remarque. La traduction matricielle de cette propriété sera qu'une matrice nilpotente A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiera nécessairement (au pire) $A^n = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 29. — (Extrait de Concours)

Dans ce problème, on note $\mathrm{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

On note également : $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$.

➤ **Partie A - Etude d'un endomorphisme**.

On considère l'application :

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$P \longmapsto (2X+1)P - (X^2-1)P'$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

1/ Ecrire la matrice $A = \mathrm{M}_{\mathrm{B}}(f)$ de f dans la base B.

2/ Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

3/ Etablir que l'équation

$$(\mathrm{E}) : \qquad P + P' = X^2 P' - 2XP$$

admet comme unique solution dans $\mathbb{R}_2[X]$ le polynôme nul.

➤ **Partie B - Changement de base**.

On considère la famille $\mathrm{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ avec :

$$P_1 = X^2 - 1\,; \qquad P_2 = (X-1)^2\,; \qquad P_3 = (X+1)^2$$

4/ Etablir que la famille B′ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5/ Ecrire la matrice de passage P de la base B à la base B′.

6/ Après avoir brièvement justifié que P est inversible, calculer P^{-1}. ‖

7/ Ecrire la matrice $A' = \mathrm{M}_{\mathrm{B}'}(f)$ de f dans la base B′. **

8/ En déduire qu'il existe (au moins) un polynôme $S \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul, tel que $f(S) = 3S$. Donner un exemple d'un tel polynôme S.

9/ Soit n un entier naturel. Préciser l'expression de A'^n, ainsi que le lien entre A^n et A'^n.

‖. On pourra vérifier que $P^{-1} = \dfrac{1}{4} R$, où $R \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
**. On pourra vérifier que A' est une matrice diagonale.

➤ Partie C - Origine de B′.

Dans la partie précédente, on a introduit une base B' dans laquelle la matrice de f est diagonale (càd "particulièrement simple"). Comme vous vous en doutez, cette base n'a pas été choisie au hasard, et la méthode générale pour la déterminer relève du programme de Spé.

Néanmoins, dans le cas particulier de cet exercice, il existe une autre méthode pour expliquer l'origine de la base B', uniquement basée sur des connaissance de Sup. L'objectif des questions ci-dessous est précisément de présenter cette méthode.

10/ **Deux propriétés générales des endomorphismes de $\mathbb{R}_2[X]$.**

Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, et soient λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels deux à deux distincts. On suppose qu'il existe trois polynômes non nuls P, Q et R dans $\mathbb{R}_2[X]$ tels que :

$$\varphi(P) = \lambda_1 P\,; \qquad \varphi(Q) = \lambda_2 Q\,; \qquad \varphi(R) = \lambda_3 R$$

a/ Etablir que la famille $F = (P, Q, R)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b/ Montrer que : $[\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])] \Longleftrightarrow [\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0]$

11/ Soit λ un réel, et soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Etablir que $f(P) = \lambda P$ si et seulement si P est solution de l'équation différentielle $(x^2-1)\,y' - (2x+1-\lambda)\,y = 0$.

12/ On note (E_λ) l'équation différentielle : $(x^2-1)\,y' - (2x+1-\lambda)\,y = 0$.

a/ Résoudre l'équation différentielle (E_λ) sur l'intervalle $I = \,]1;+\infty[$. ††

b/ Montrer qu'il existe une fonction polynomiale non nulle solution de (E_λ) sur $]1;+\infty[$ si et seulement si $\lambda \in \{-1;1;3\}$.

Exercice 30. — (Inversibilité ⟷ Rang maximal).

Pour toute matrice carrée A, il est équivalent de dire que A est inversible ou que le rang de A est égal à n. Formellement ‡‡ :

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad [A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})] \Longleftrightarrow [\mathrm{rg}(A) = n]$$

Cette observation faite, on propose ci-dessous de prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ de quatre manières différentes.

1/ Résoudre le système "$AX = B$". En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

2/ Calculer $(A + \mathrm{I}_3)^3$. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

3/ Calculer le rang de A. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

4/ Montrer que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. En déduire que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

††. Par "résoudre l'équation différentielle" on entend "déterminer toutes les fonctions de $\mathscr{C}^1(]1;+\infty[\,,\mathbb{R})$ solutions de (E_λ)".

‡‡. C'est une conséquence du théorème du rang : l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice A est surjectif (càd $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = n$) SSI il est bijectif (càd $f \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 31. — On considère l'application : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto (9x - 4y,\ 12x - 5y)$$

On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1/ Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2/ Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Donner l'expression de l'automorphisme réciproque f^{-1}.

3/ On considère à présent la famille $B' = (u, v)$, où u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées dans la base canonique : $u = (1, 2)$ et $v = (2, 3)$.

a/ Justifier que B' est une base de $\mathbb{R}^2$.

b/ Ecrire la matrice de passage de la base B à la base B'. Dans la suite de l'exercice, on pourra noter P cette matrice.

c/ Calculer la matrice A' de l'application linéaire f dans la base B' (on vérifiera que A' est une matrice diagonale).

d/ Calculer pour tout entier naturel n la matrice ${A'}^n$; puis la matrice A^n.