Chapitre 28 — "L'essentiel" sur les espaces euclidiens

Préambule. Ce nouveau chapitre d'algèbre linéaire est finalement le premier donnant lieu à des applications (nombreuses et variées) à des domaines "extra-mathématiques". En effet, si les premières notions définies ici (celles de produit scalaire et de distance) peuvent apparaître au premier abord comme un joujou inutile, elles permettent de résoudre des problèmes concrets d'optimisation.

Naïvement, dans le plan usuel, la notion usuelle de distance permet de répondre au problème d'optimisation très pratique : "quel est le plus court chemin pour aller de la salle F02 à la plage ?".

Ce chapitre a pour vocation d'étendre cette notion de distance à d'autres espaces vectoriels que $\mathbb{R}^2$. Une fois cette extension faite, les célèbres outils que sont les droites de régression linéaire, et les séries de Fourier, apparaîtront comme des objets minimisant des distances dans des espaces vectoriels ad hoc.

Table des matières

Tout au long de ce chapitre, les espaces vectoriels sont réels (ce sont des $\mathbb{R}$-ev).

1. Produits scalaires

Définition 1 - Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique positive et non-dégénérée sur E, c'est-à-dire une application :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = \langle u, v \rangle$$

telle que :

PS 1/ $\forall (u,v,w) \in E^3,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$
(linéarité par rapport à la première variable)

PS 2/ $\forall (u,v,w) \in E^3,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \langle u, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle u, w \rangle$
(linéarité par rapport à la seconde variable)

PS 3/ $\forall (u,v) \in E^2,\ \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *(symétrie)*

PS 4/ $\forall u \in E,\ \langle u, u \rangle \geqslant 0$ *(positivité)*

PS 5/ $[\langle u, u \rangle = 0] \Longleftrightarrow [u = 0]$ *(non-dégénérescence)*

Remarque. La symétrie et la linéarité par rapport à une variable entraînent la linéarité par rapport à l'autre variable. En pratique, on ne démontre donc "qu'une linéarité sur les deux".

Exemples de produits scalaires :

1/ L'application : $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto xx' + yy'$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Définition analogue sur $\mathbb{R}^3$ mutatis mutandis.

2/ L'application : $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) \longmapsto xx' + 3yy' - xy' - x'y$ est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

3/ L'application : $\left((x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}, (y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\right) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

4/ L'application : $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\, g(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.

5/ L'application : $(f,g) \longmapsto f(0)\, g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\, g'(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$.

6/ L'application : $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ (ou $\mathbb{R}_n[X]$ ou encore $\mathbb{R}[X]$).

7/ L'application : $(P,Q) \longmapsto P(0)\, Q(0) + P(1)\, Q(1) + P(2)\, Q(2)$ est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

8/ L'application : $\left((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right) \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

9/ L'application : $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; c'est la version déguisée de l'exemple précédent.

Définition 2 - Un **espace préhilbertien** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemples. $\mathbb{R}^2$ muni d'un des produits scalaires définis plus haut est un espace préhilbertien ; $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exemple 4 est préhilbertien...

Définition 3 - Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien de dimension finie.

Exemples. $\mathbb{R}^2$ muni d'un des produits scalaires définis plus haut est euclidien, tandis que $\mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de l'exemple 4 (ou muni de n'importe quel autre produit scalaire) ne l'est pas...

2. Orthogonalité

Dans ce paragraphe, on se place dans un espace préhilbertien E, et on note $\langle u,v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

Définition 4 - Deux vecteurs u et v sont dits **orthogonaux** si $\langle u,v\rangle = 0$.

Exemple : les fonctions sin et cos sont orthogonales pour le produit scalaire défini sur $\mathscr{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ en posant : $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} fg$. Les polynômes de Lagrange L_0, L_1 et L_2 (associés aux réels 0, 1 et 2) sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ défini en posant : $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i)$.

Définition 5 - Soit F un sev d'un espace préhilbertien E. On appelle **orthogonal de** F et on note $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E othogonaux à tous les vecteurs de F, explicitement :

$$F^\perp = \{v \in E \mid \forall\, u \in E,\ \langle v,u\rangle = 0\}$$

Plus généralement, on peut définir l'orthogonal d'une *partie* A de E quelconque de manière rigoureusement identique à celle présentée ci-dessus.

Propriété 1 - Soient E un espace préhilbertien, et A une partie de E. L'orthogonal de A (qui est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A), noté $A^\perp$, est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'orthogonal de la droite D d'équation $y = x$ est la droite $D^\perp$ d'équation $x+y=0$. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, l'orthogonal du plan P d'équation $x+y+z=0$ est la droite vectorielle $P^\perp$ de vecteur directeur $(1,1,1)$.

Enfin, dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$

l'orthogonal du sev $S_2(\mathbb{R})$ des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ symétriques est le sev $A_2(\mathbb{R})$ des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ antisymétriques.

Propriété 2 - Soient p un entier naturel non nul et $f_1, \ldots, f_p$ p vecteurs d'un espace préhilbertien E. On a : $[\mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p)]^{\perp} = \{f_1, \ldots, f_p\}^{\perp}$.

Muni de cette propriété, on peut montrer qu'un vecteur est orthogonal à un sev en vérifiant qu'il est orthogonal aux vecteurs d'une de ses familles génératrices. Il s'agit donc d'un énoncé fort utile en pratique lorsqu'il s'agit de déterminer l'orthogonal d'un sev.

Ce paragraphe se termine par quelques énoncés généralaux sur les orthogonaux, qui interviendront dans la suite du chapitre.

Propriété 3 - Soit E un espace préhilbertien. On a :

1) $\{0\}^{\perp} = E$

2) $E^{\perp} = \{0\}$

3) Soient F et G deux sev de E. On a : $[F \subset G] \Longrightarrow \left[G^{\perp} \subset F^{\perp}\right]$

4) Pour tout sev F de E, on a : $F \cap F^{\perp} = \{0\}$

5) Soit F un sev de E. On a : $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$

Remarque. Plus généralement, la propriété 3 de l'énoncé ci-dessus reste valable si l'on remplace les *sev* F et G par deux *parties* A et B de E. Explicitement :

$$\forall\,(A,B) \in \left(\mathscr{P}(E)\right)^2,\ [A \subset B] \Longrightarrow \left[B^{\perp} \subset A^{\perp}\right]$$

Ce qui signifie que l'application $X \in \mathscr{P}(E) \longmapsto X^{\perp} \in \mathscr{P}(E)$ est décroissante (pour l'inclusion).

3. Norme et distance associées à un produit scalaire

Dans ce paragraphe, E désigne toujours un espace préhilbertien, dont le produit scalaire est noté $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

Définition 6 - On appelle **norme** (associée au produit scalaire) de E, l'application :

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ v &\longmapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \end{aligned}$$

Remarques et exemples. Dans un espace préhilbertien, la norme est donc relative au produit scalaire choisi. Ainsi, la norme d'un vecteur $v\,(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ est $\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$ pour le produit scalaire usuel ; mais on a $\|v\| = \sqrt{x^2+3y^2-2xy}$ si l'on munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire de l'exemple 2 du paragraphe précédent.

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire de l'exemple 7 du paragraphe précédent, la norme du polynôme $L_0 = \dfrac{1}{2}\,(X-1)\,(X-2)$ vaut 1.

Dans $\mathscr{C}^0\left([-\pi,\pi]\,,\mathbb{R}\right)$, on définit un produit scalaire en posant : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} fg$. On a alors : $\|\cos\| = \|\sin\| = \sqrt{\pi}$.

Notons que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, la norme de $v = (x_1, \ldots, x_n)$ est $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$; et la suite du chapitre montrera que quitte à choisir une “bonne base” d'un espace euclidien E, la norme est toujours donnée par cette formule.

Propriété 4 - (Propriétés générales de la norme). Avec les notations précédemment introduites :

1/ $\forall v \in E, \quad \|v\| \geqslant 0$

2/ $\forall v \in E, \quad (\|v\| = 0) \Longleftrightarrow (v = 0)$

3/ $\forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \times \|v\|$

Propriété 5 - (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Avec les notations introduites plus haut :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

Exemples d'application. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$ et à valeurs réelles. On suppose encore f et g continues sur $[a,b]$, de telle sorte que fg, f^2 et g^2 le soient, et que toutes ces fonctions soient ainsi intégrables sur $[a,b]$. Alors : $\left|\displaystyle\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\left(\displaystyle\int_a^b f^2\right) \times \left(\displaystyle\int_a^b g^2\right)}$.

Autre application : pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right| \leqslant \sqrt{n} \times \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

On obtient comme corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwartz l'inégalité ci-dessous, qui vous est plus familière.

Propriété 6 - (Inégalité triangulaire). Avec les notations introduites plus haut :

$$\forall (u,v) \in E^2, \quad \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$$

Propriété 7 - (Identité de polarisation). Soit E un espace préhilbertien. On a :

$$\forall \ (v,w) \in E^2, \ \langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$$

Définition 7 - Soient u et v deux éléments de E. On appelle **distance (euclidienne)** entre u et v le réel positif ou nul : $\mathrm{d}(u,v) = \|u - v\|$.

Exemples. Voir déjà tous les calculs de distances que vous avez faits dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ au lycée. Dans un autre registre, si l'on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k)\,Q(k)$, la distance entre deux polynômes P et Q est alors $\mathrm{d}(P,Q) = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{2} [P(k) - Q(k)]^2}$. En notant L_0, L_1 et L_2 nos vieux amis de Lagrange, on obtient : $\mathrm{d}(L_0, L_1) = \mathrm{d}(L_0, L_2) = \mathrm{d}(L_1, L_2) = \sqrt{2}$; donc L_0, L_1 et L_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Propriété 8 - (Propriétés de la distance). Avec les notations précédemment introduites :

1) $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ \mathrm{d}\,(u,v) \geqslant 0$ (positivité)

2) $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ \mathrm{d}\,(u,v) = d\,(v,u)$ (symétrie)

3) $\forall\ (u,v) \in\ E^2,\ [\mathrm{d}\,(u,v) = 0] \Longrightarrow [u = v]$ (“séparation”)

4) $\forall\ (u,v,w) \in\ E^3,\ \mathrm{d}\,(u,w) \leqslant d\,(u,v) + d\,(v,w)$ (inégalité triangulaire)

4. Familles orthogonales et bases orthonormales

4.1. **Familles orthogonales.** *Même convention que précédemment : E désigne un espace préhilbertien, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ son produit scalaire, et $\|\bullet\|$ la norme associée.*

Définition 8 - Soit p un entier naturel non nul.

Une **famille orthogonale** $\mathscr{F} = \{f_1, \ldots, f_p\}$ de vecteurs de E est constituée de vecteurs deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall\,(i,j) \in [\![\, 1, p \,]\!]^2,\ [i \neq j] \Longrightarrow [\langle f_i, f_j \rangle = 0]$$

Exemples : les bases canoniques usuelles de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont des familles orthogonales pour les produits scalaires canoniques sur ces ev.

La famille constituée des polynômes de Lagrange (L_0, L_1, L_2) associés aux valeurs 0, 1 et 2 est orthogonale pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P\,(k)\,Q\,(k)$.

Plus généralement, si $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ désignent $p+1$ réels distincts et $L_0, \ldots, L_p$ les $p+1$ polynômes de Lagrange de degré p associés à ces réels, la famille $\{L_0, \ldots, L_p\}$ est orthogonale dans $\mathbb{R}_p\,[X]$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{\mathrm{III}=0}^{p} P\,(\alpha_{\mathrm{III}})\,Q\,(\alpha_{\mathrm{III}})$.

La base canonique de $\mathrm{M}_2\,(\mathbb{R})$ constituée des matrices élémentaires $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2}$ est une famille orthogonale de $\mathrm{M}_2\,(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire : $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}\,(A\,{}^tB)$.

La famille $(f_k : x \in\ [-\pi, \pi] \longmapsto \cos\,(kx))_{k \in [\![1,n]\!]}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} fg$.

Propriété 9 - Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Propriété 10 - Dans un espace euclidien de dimension n, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de cardinal n est une base.

On dispose en outre dans un espace préhilbertien d'une version généralisée d'un énoncé que vous connaissez particulièrement bien.

Théorème 1 - (**Super-Théorème de Pythagore**).
Soit $\mathscr{F} = \{f_1, \dots, f_p\}$ une famille orthogonale d'un espace préhilbertien E. On a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|f_i\|^2$$

4.2. **Bases orthonormales : définition, existence et construction.**

Définition 9 - On appelle **vecteur unitaire** de E un vecteur de norme 1.

Exemples : le polynôme 1 est unitaire pour le produit scalaire de $\mathbb{R}[X]$ défini en posant $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Pour le même produit scalaire X ne l'est pas car $\|X\| = \sqrt{3}/3$; donc $\left(\sqrt{3}X\right)$ est unitaire.

Les polynômes de Lagrange L_0, L_1 et L_2 associés aux scalaires 0, 1 et 2 sont unitaires pour le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{2} P(i)Q(i)$.

Les fonctions $g_k : x \in [-\pi, \pi] \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) sont unitaires pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$.

Les matrices élémentaires E_{ij} de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ sont unitaires pour le produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(A\,{}^tB)$.

Définition 10 - Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. Une **base orthonormale** est une famille orthogonale de vecteurs unitaires de E, qui en est une base.

Exemples : on peut reprendre les exemples évoqués avant cette définition. Les bases canoniques usuelles de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ sont des bases orthonormales pour les produits scalaires canoniques sur ces ev.

La famille constituée des polynômes de Lagrange $\{L_0, L_1, L_2\}$ associés aux valeurs 0, 1 et 2 est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P(k)\,Q(k)$.

Les fonctions $g_k : x \in [-\pi, \pi] \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) constituent une base orthonormale de $\mathrm{Vect}\,(g_k)_{k\in [\![1,n]\!]}$ pour...

Les matrices élémentaires E_{ij} de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ constituent une base orthonormale de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ pour...

La méthode ci-dessous décrit un procédé permettant de construire une base orthonormée à partir d'une base quelconque d'un ev euclidien E.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

On considère une base $\mathscr{B} = (\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n)$ de E.

➤ Etape 1 — Orthogonalisation : on pose $\mathrm{e}'_1 = \mathrm{e}_1$ puis

$$\forall\, k \in [\![2, n]\!],\ \mathrm{e}'_k = \mathrm{e}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathrm{e}'_i, \mathrm{e}_k\rangle}{\|\mathrm{e}'_i\|^2}\, \mathrm{e}'_i \qquad (\spadesuit)$$

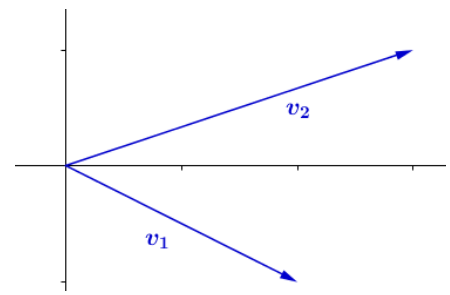
La famille $\mathscr{B}' = (\mathrm{e}'_1, \dots, \mathrm{e}'_n)$ ainsi obtenue est une base ortho*gonale* de E.

➤ Etape 2 — Normalisation : on pose $\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{e}''_k = \dfrac{1}{\|\mathrm{e}'_k\|}\, \mathrm{e}'_k$.

La famille $\mathscr{B}'' = (\mathrm{e}''_1, \dots, \mathrm{e}''_n)$ est alors une base orthonormale de E.

Deux exemples pour comprendre le principe.

Exemple 1 Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère la famille $B = (v_1, v_2)$ où v_1 et v_2 ont pour coordonnées respectives $(2, -1)$ et $(3, 1)$.



➤ **Orthogonalisation** :

- ✦ On pose $v'_1 = v_1$. Donc $v'_1 = (2, -1)$;
- ✦ On pose $v'_2 = v_2 + \alpha_1 v'_1$ où α_1 doit être pris de telle sorte que v'_2 et v'_1 soient orthogonaux, c'est-à-dire tel que : $\langle v'_2, v'_1\rangle = 0$ $(\spadesuit)$

Or : $\langle v'_2, v'_1\rangle = \langle v_2 + \alpha_1 v'_1, v'_1\rangle = \langle v_2, v'_1\rangle + \alpha_1 \langle v'_1, v'_1\rangle = \langle v_2, v'_1\rangle + \alpha_1 \|v'_1\|^2$

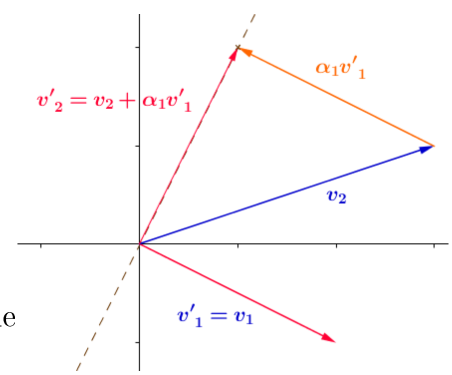
Par suite, la condition $(\spadesuit)$ devient : $\langle v_2, v'_1\rangle + \alpha_1 \|v'_1\|^2 = 0$ d'où $\alpha_1 = -\dfrac{\langle v_2, v'_1\rangle}{\|v'_1\|^2}$

Il ne reste plus qu'à calculer un produit scalaire et une norme pour clore cette étape. Explicitement : $\langle v_2, v'_1\rangle = \langle (3,1), (2,-1)\rangle = 5$ et $\|v'_1\|^2 = 5$. On en déduit que $\alpha_1 = -1$ et par suite :

$$v'_2 = v_2 - v'_1 \quad \text{d'où } v'_2 = (1, 2)$$

On peut alors constater avec allégresse que :

La famille $B' = \left(v'_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale



➤ **Normalisation** : il ne reste plus qu'à transformer les vecteurs précédents en vecteurs de norme 1. Pour ce faire, on pose :

$$v''_1 = \frac{1}{\|v'_1\|}\, v'_1 \qquad \text{et} \qquad v''_2 = \frac{1}{\|v'_2\|}\, v'_1$$

Comme il est clair que $\|v'_1\| = \|v'_2\| = \sqrt{5}$, on peut conclure (enfin !) que :

$$\boxed{\text{La famille } B'' = \left(v''_1 \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, v''_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix}\right) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^2.}$$

EXEMPLE 2 Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère la famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1\,(1,1,0)$, $v_2\,(1,0,1)$ et $v_3\,(1,1,1)$.

➤ **ORTHOGONALISATION** :

- ✦ On pose $v'_1 = v_1$. Donc $v'_1 = (1,1,0)$;
- ✦ On pose $v'_2 = v_2 + \alpha_1 v'_1$ où α_1 doit être pris de telle sorte que v'_2 et v'_1 soient orthogonaux, c'est-à-dire tel que : $\langle v'_2, v'_1\rangle = 0$ $(\spadesuit)$

Or : $\langle v'_2, v'_1\rangle = \langle v_2 + \alpha_1 v'_1, v'_1\rangle = \langle v_2, v'_1\rangle + \alpha_1 \langle v'_1, v'_1\rangle = \langle v_2, v'_1\rangle + \alpha_1 \|v'_1\|^2$

Par suite, la condition $(\spadesuit)$ devient : $\langle v_2, v'_1\rangle + \alpha_1 \|v'_1\|^2 = 0$ d'où $\alpha_1 = -\dfrac{\langle v_2, v'_1\rangle}{\|v'_1\|^2}$

Il ne reste plus qu'à calculer un produit scalaire et une norme pour clore cette étape. Explicitement : $\langle v_2, v'_1\rangle = \langle (1,0,1), (1,1,0)\rangle = 1$ et $\|v'_1\|^2 = 2$. On en déduit que $\alpha_1 = -1/2$ et par suite :

$$v'_2 = v_2 - \frac{1}{2} v'_1 \quad \text{d'où } v'_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

✦ On pose $\boxed{v'_3 = v_3 + \alpha_1 v'_1 + \alpha_2 v'_2}$ où α_1 et α_2 doivent être pris de telle sorte que v'_3 soit orthogonal à v'_1 et v'_2, c'est-à-dire tel que : $\boxed{\langle v'_3, v'_1\rangle = 0 \text{ et } \langle v'_3, v'_2\rangle = 0}$.

Des calculs analogues aux précédents permettent de déduire de ces deux relations que :

$$\boxed{\alpha_1 = -\frac{\langle v_3, v'_1\rangle}{\|v'_1\|^2}} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = -\frac{\langle v_3, v'_2\rangle}{\|v'_2\|^2}$$

Tous calculs faits, on obtient :

$$\boxed{\alpha_1 = -1} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha_2 = -\frac{2}{3}}$$

Par suite : $v'_3 = v_3 - v'_1 - \dfrac{2}{3} v'_2$ d'où : $v'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ soit : $v'_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

On peut alors constater que :

$$\boxed{\text{La famille } B' = \left(v'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v'_2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, v'_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}^3.}$$

➤ **NORMALISATION** : il ne reste plus qu'à transformer les vecteurs précédents en vecteurs de norme 1. Pour ce faire, on pose :

$$v''_1 = \frac{1}{\|v'_1\|} v'_1 \qquad \text{et} \qquad v''_2 = \frac{1}{\|v'_2\|} v'_2 \qquad \text{et} \qquad v''_3 = \frac{1}{\|v'_3\|} v'_3$$

Comme : $\|v'_1\| = \sqrt{2}$, $\|v'_2\| = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ et $\|v'_3\| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, on peut conclure que :

La famille $B' = \left(v'_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, v'_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, v'_3 \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Remarque. Ne retenez pas par cœur la formule (♠) ; il est sans doute plus profitable d'avoir compris les exemples pratiques d'utilisation précédents.

Propriété 11 - (Existence de bases orthonormales). Tout espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ admet (au moins) une base orthonormale.

A présent que l'on sait que les bases orthonormales existent, il est légitime de répondre à la question : “oui, mais à quoi ça sert ?”… La réponse pratique sera fournie par le paragraphe suivant.

4.3. Expressions du produit scalaire, de la norme et du projeté dans une base orthonormale.

Les deux énoncés ci-dessous signifient que quitte à choisir une base orthonormale, le produit scalaire et la norme se calculent dans un espace euclidien quelconque de la même façon que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.

Propriété 12 - Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$, et $\mathscr{B} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ une base orthonormale de E.
Soient u et v deux vecteurs de E, de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. On a :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Propriété 13 - Mêmes hypothèses et notations que dans l'énoncé précédent.
On a :

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Théorème 2 - Soient E un espace euclidien. Pour tout sev F de E, on a :

$$E = F \bigoplus F^\perp$$

En d'autres termes, F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E. En particulier : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Théorème 3 - Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.
Pour tout sev F de E, on a : $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Autrement dit, dans un espace euclidien, tout sev est égal à son bi-orthogonal.

Enfin, comme qui dit supplémentaire dit projection et symétrie, on peut poser les :

Définition 11 - Soient E un espace euclidien, et F un sev de E. Soit $v \in E$. D'après le théorème précédent : $\exists!\ (v_F, v_{F^\perp}) \in F \times F^\perp,\ v = v_F + v_{F^\perp}$.

On appelle **projeté orthogonal de v sur F** et nous conviendrons dans ces lignes de noter $p_F(v)$ le vecteur v_F.

La **projection orthogonale sur** F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, c'est-à-dire l'application qui à v associe v_F.

La **symétrie orthogonale par rapport à** F est la symétrie par rapport F parallèlement à $F^\perp$, c'est-à-dire l'application qui à v associe $v_F - v_{F^\perp}$.

Notons p_F la projection orthogonale sur F. Puisque c'est un cas particulier de projecteur, elle en possède les propriétés caractéristiques, explicitement :

Propriété 14 - Mêmes hypothèses et notations que dans la définition précédente. On a :

1/ $p_F \in \mathscr{L}(E)$ 2/ $p_F^2 = p_F$ 3/ $\ker(p_F) = F^\perp$ 4/ $\mathrm{Im}(p_F) = F$

La propriété ci-dessous donne un nouvel exemple d'application des bases orthonormales.

Propriété 15 - (Expression du projeté orthogonal dans une BON). Mêmes hypothèses et notations que précédemment.

On suppose que $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormale de F. Alors :

$$\forall\, v \in E, \quad p_F(v) = \sum_{i=1}^{p} \langle v, f_i \rangle\, f_i$$

Cette dernière propriété fournit une formule explicite (dès lors que l'on dispose d'une BON du sev F sur lequel on veut projeter) pour le calcul du projeté orthogonal d'un vecteur v sur F. Une autre méthode pour déterminer le projeté consiste à utiliser le fait que $(v - p_F(v)) \in F^\perp$, et à traduire cette appartenance à l'orthogonal à l'aide d'une famille génératrice de F (cf dernière propriété du paragraphe "Orthogonalité").

Pour conclure, la symétrie orthogonale par rapport à F (que nous noterons s_F) dispose des propriétés ci-dessous.

Propriété 16 - Mêmes hypothèses et notations que précédemment. On a :

1/ $s_F \in \mathscr{L}(E)$

2/ $s_F^2 = \mathrm{id}_E$ (en particulier : $s_F \in \mathrm{GL}(E)$)

3/ $\ker(s_F) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(s_F) = F$

4/ $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$

5. Inégalité de Bessel (et problèmes d'optimisation)

Théorème 4 - (Inégalité de Bessel) Soient E un espace euclidien, et F un sev de E. Soit v un élément de E. Alors :

$$\forall\, w \in\ F,\ \mathrm{d}\,(v, w) \geqslant \mathrm{d}\,(v, p_F\,(v)) \quad \text{d'où :} \quad \mathrm{d}\,(v, p_F\,(v)) = \min_{w \in\ F} \mathrm{d}\,(v, w)$$

Interprétation. "Le projeté orthogonal minimise la distance à F".

Définition 12 - Avec les notations du théorème, on appelle **distance de** v **au sous-espace vectoriel** F et on note $\mathrm{d}\,(v, F)$ le réel $\mathrm{d}\,(v, p_F\,(v))$.

Applications : l'inégalité de Bessel a des conséquences pratiques nombreuses et spectaculaires. L'idée est que cet énoncé donne la solution à de nombreux problèmes dits "d'optimisation", c'est-à-dire où l'on cherche la meilleure réponse possible à une question donnée, relativement à une distance choisie. Voici une liste non-exhaustive de telles questions :

- Approximation (au sens des moindres carrés) d'un nuage de points par une droite (droite de régression), une parabole, ou plus généralement la courbe d'une fonction polynomiale de degré fixé ;
- Approximation uniforme des fonctions continues à support inclus dans $[0; 1]$ par les polynômes de Bernstein ;
- Approximation uniforme des fonctions continues et périodiques par leurs sommes partielles de Fourier.