EXERCICES 28 - ESPACES EUCLIDIENS

► Produit scalaire, orthogonalité

EXERCICE 1. — Montrer que les deux applications suivantes sont des produits scalaires.

$$1) \forall \vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + 3yy' - xy' - x'y$$

$$2) \forall (f, g) \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})^2, \langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

EXERCICE 2. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 3. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 4. — Dans cet exercice, on note $E = \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continuellement dérivables sur $[0; \pi]$. Les applications ci-dessous sont-elles des produits scalaires sur E ?

$$1) \varphi(f, g) = \int_0^\pi f(t)g(t) dt \qquad 2) \psi(f, g) = \int_0^\pi f'(t)g'(t) dt$$

EXERCICE 5. — Soit n un entier naturel non-nul. On considère l'application :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

1/ En notant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$.

2/ Montrer que l'application $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 6. — Soient E un ev préhilbertien. Montrer que l'application $A \in \mathcal{P}(E) \mapsto A^\perp \in \mathcal{P}(E)$ est décroissante pour l'inclusion, c'ad :

$$\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), [F \subset G] \implies [F^\perp \supset G^\perp]$$

EXERCICE 7. — Soient E un ev préhilbertien, et $v_1, \dots, v_n$ n vecteurs de E . Etablir que :

$$[\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)]^\perp = \{v_1, \dots, v_n\}^\perp$$

Applications.

A.1. On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

A.2. On munit $E = M_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$. Déterminer $A_2(\mathbb{R})^\perp$.*

EXERCICE 8. — Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2e_1 - 3e_2$. Déterminer $D^\perp$.

*. $A_2(\mathbb{R})^\perp$ désignant le sev des matrices antisymétriques de $M_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 9. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2e_1 - 3e_2$. Déterminer $D^\perp$.

EXERCICE 10. — Soit F un sev d'un espace euclidien E . Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

EXERCICE 11. — Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.

EXERCICE 12. — Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive, et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.
Montrer que : $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

► **Bases orthonormales, méthode de Gram-Schmidt**

EXERCICE 13. — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B .

Soit $P = \text{Vect}(\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (1, 2, 0))$. Déterminer une base orthonormale de P .

EXERCICE 14. — On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B , et on considère le sev F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F .

EXERCICE 15. — Construire une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ (muni produit scalaire usuel) dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x - y + z = 0$.

EXERCICE 16. — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Déterminer une base orthonormale de P .

EXERCICE 17. — On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π -périodiques (et à valeurs réelles), muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

Montrer que la famille $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$, avec $f_n(x) = \cos(nx)$, est une famille orthonormée pour $\langle , \rangle$.

EXERCICE 18. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$.
Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

EXERCICE 19. — On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni produit scalaire usuel et de la base canonique B .

Soit $F = \text{Vect}(\vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (0, 1, 1, 0), \vec{w} = (0, 0, 1, 1))$. Déterminer une base orthonormale de F .

EXERCICE 20. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 P(i) Q(i).$$

Construire une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

► **Distance, distance à un sev et optimisation**

EXERCICE 21. — (**Propriétés de la distance**). Soient E un espace préhilbertien. On note respectivement $\|\cdot\|$ et d la norme et la distance naturellement associées au produit scalaire de E . Démontrer les propriétés suivantes :

1/ $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0$ (positivité)

2/ $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) = d(v, u)$ (symétrie)

3/ $\forall (u, v) \in E^2, [d(u, v) = 0] \implies [u = v]$ (séparation)

4/ $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (inégalité triangulaire)

EXERCICE 22. — 1/ Montrer que l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \int_{-1}^1 \frac{P(t) Q(t)}{1+t^2} dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2/ On note $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathbb{R}_2[X]$ associée au produit scalaire ci-dessus. Calculer $\|1\|$ et $\|X\|$.

3/ Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

4/ Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. En déduire $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \frac{(t^2 - at - b)^2}{1+t^2} dt$

EXERCICE 23. — Déterminer $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 [t^2 - (at + b)]^2 dt$.

EXERCICE 24. — Déterminer $\lambda = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi [a \sin(t) + b \cos(t) - t]^2 dt$.

EXERCICE 25. — (**Projection orthogonale**). Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x + y + z = 0$; et $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la projection orthogonale sur H .

1) Construire une base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, telle que B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ appartenant à H .

2) Ecrire la matrice A' de p dans la base B' .

3) Expliciter la matrice A de p dans la base canonique B .

EXERCICE 26. — (**Symétrie orthogonale**). Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note H le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation : $x - z = 0$; et $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie orthogonale par rapport à H .

- 1) Construire une base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, telle que B' est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ appartenant à H .
- 2) Ecrire la matrice A' de s dans la base B' .
- 3) Expliciter la matrice A de s dans la base canonique B .

► Groupes d'automorphismes

EXERCICE 27. — (**Groupe orthogonal**). Soit E un espace euclidien, et soit u un endomorphisme de E . On dit que u est un **endomorphisme orthogonal** s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- 1/ Montrer que si u est orthogonal, alors : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
- 2/ En déduire que si u est un endomorphisme orthogonal, alors u est un automorphisme de E .
- 3/ Prouver la réciproque de 1/ : si $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$, alors u est orthogonal.
- 4/ On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E . Montrer que $O(E)$ est un groupe (pour la composition des applications évidemment).

EXERCICE 28. — (**Groupe des similitudes d'un espace euclidien**). Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle **similitude** de E une application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\exists \lambda > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|.$$

Le réel λ est alors appelé **rapport** de la similitude f .

- 1) Etablir que f est une similitude de E si et seulement si :

$$\exists \lambda > 0, \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle.$$

- 2) Prouver que si f est une similitude de E , alors f est un automorphisme de E .
- 3) Etablir que si f est une similitude de E de rapport λ , alors f^{-1} est une similitude de E dont on précisera le mystérieux rapport.
- 4) On note $\text{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E . Etablir que $(\text{Sim}(E), \circ)$ est un groupe.