

EXERCICES 28 - ESPACES EUCLIDIENS - CORRIGÉ

► **Produit scalaire, orthogonalité**

EXERCICE 1. — Montrer que les deux applications suivantes sont des produits scalaires.

$$1) \forall \vec{u}(x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{v}(x', y') \in \mathbb{R}^2, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + 3yy' - xy' - x'y$$

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité) : triviales.

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a : $\langle u, u \rangle = x^2 + 3y^2 - 2xy = (x - y)^2 + 2y^2$. D'où la positivité.

De plus : $\langle u, u \rangle = 0 \implies [x - y = 0 \text{ et } y = 0] \implies [x = y = 0]$.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 .

$$2) \forall (f, g) \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})^2, \langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ telle que : $\langle f, f \rangle = 0$. Alors :

$$f^2(0) + \int_0^1 [f'(t)]^2 dt = 0$$

On en déduit que $f(0) = 0$ et f' identiquement nulle sur $[0, 1]$ (propriété de l'intégrale nulle). Donc f est constante égale à 0. La forme \langle, \rangle est donc définie.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$.

EXERCICE 2. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n P(k)^2 = 0 \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) = 0$$

Donc P admet $(n + 1)$ racines distinctes. Puisqu'il est de degré majoré par n , il est nul. La forme \langle, \rangle est donc définie.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 3. — Soit n un entier naturel non-nul. Montrer que l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n [P^{(k)}(0)]^2 \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(0) = 0$$

D'après la formule de Taylor dans $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que P est nul. La forme \langle, \rangle est donc définie.

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

EXERCICE 4. — Dans cet exercice, on note $E = \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continuellement dérivables sur $[0; \pi]$. Les applications ci-dessous sont-elles des produits scalaires sur E ?

$$1) \varphi(f, g) = \int_0^\pi f(t)g(t) dt \qquad 2) \psi(f, g) = \int_0^\pi f'(t)g'(t) dt$$

1/ Oui : linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales. Définie : propriété de l'intégrale nulle.

2/ Non : la forme n'est pas définie (est dégénérée) : $\psi(1, 1) = 0$.

EXERCICE 5. — Soit n un entier naturel non-nul. On considère l'application :

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}), \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

1/ En notant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$.

$$\text{Notons } P = AB. \text{ Par définition du produit matriciel, on a : } p_{ij} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ki}b_{kj}.$$

$$\text{En particulier : } p_{ii} = \sum_{k=1}^n ({}^tA)_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n A_{ki}b_{ki}. \text{ D'où : } \text{tr}(P) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ki}b_{ki}.$$

$$\text{Conclusion. } \text{tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$$

2/ Montrer que l'application $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Linéarité par rapport à la première variable, symétrie (donc bilinéarité), positivité : triviales.

$$\text{Définie : si } \langle A, A \rangle = 0, \text{ alors } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0 \implies \forall (i, i) \in [1, n]^2, a_{ij} = 0 \implies A = 0$$

Conclusion. $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est bilinéaire, symétrie, définie positive : c'est donc un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 6. — Soient E un ev préhilbertien. Montrer que l'application $A \in \mathcal{P}(E) \mapsto A^\perp \in \mathcal{P}(E)$ est décroissante pour l'inclusion, c-à-d :

$$\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), [F \subset G] \implies [F^\perp \supset G^\perp]$$

Supposons $F \subset G$. Si $v \in G^\perp$, alors v est orthogonal à tout vecteur de G , donc a fortiori à tout vecteur de F : donc $v \in F^\perp$.

Conclusion. $\forall (F, G) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), [F \subset G] \implies [F^\perp \supset G^\perp]$

EXERCICE 7. — Soient E un ev préhilbertien, et v_1, \dots, v_n n vecteurs de E . Etablir que :

$$[\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)]^\perp = \{v_1, \dots, v_n\}^\perp$$

D'après l'exercice précédent : $[\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)]^\perp \subset \{v_1, \dots, v_n\}^\perp$.

Inclusion réciproque : si $w \in \{v_1, \dots, v_n\}^\perp$, alors $w \in [\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)]^\perp$ par hypothèse et linéarité du produit scalaire par rapport à la première variable (ou la seconde, comme vous voulez).

Conclusion. $[\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)]^\perp = \{v_1, \dots, v_n\}^\perp$.

Applications.

A.1. On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$. Déterminer $\mathbb{R}_1[X]^\perp$.

D'après l'exercice précédent : $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \{1, X\}^\perp$.

Déterminons : $\{1, X\}^\perp$ (c'est l'ensemble des polynômes de E orthogonaux à 1 et X).

Notons $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$P \in \{1, X\}^\perp \iff (\langle P, 1 \rangle = 0 \text{ et } \langle P, X \rangle = 0) \iff (2a + 3c = 0 \text{ et } b = 0) \iff (c = -2a/3 \text{ et } a = 0)$$

D'où : $P \in \{1, X\}^\perp \iff P \in \text{Vect}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)$.

Conclusion. $\mathbb{R}_1[X]^\perp = \text{Vect}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)$.

A.2. On munit $E = M_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$. Déterminer $A_2(\mathbb{R})^\perp$.*

D'après la première question : $A_2(\mathbb{R})^\perp = \{E_{12} - E_{21}\}^\perp$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in A_2(\mathbb{R})^\perp \iff \langle M, E_{12} - E_{21} \rangle = 0 \iff b - c = 0 \iff M \in \text{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}) = S_2(\mathbb{R})$$

Conclusion. $A_2(\mathbb{R})^\perp = S_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 8. — Dans \mathbb{R}^2 muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2e_1 - 3e_2$. Déterminer D^\perp .

$$D^\perp = \text{Vect}(3, 2)$$

Conclusion.

EXERCICE 9. — Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, on considère la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $u = 2e_1 - 3e_2$. Déterminer D^\perp .

$$D^\perp = \text{Vect}((3, 2, 0), (3, 2, 1))$$

EXERCICE 10. — Soit F un sev d'un espace euclidien E . Montrer que $F \cap F^\perp = \{0\}$.

En classe.

EXERCICE 11. — Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$.

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

*. $A_2(\mathbb{R})^\perp$ désignant le sev des matrices antisymétriques de $M_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 12. — Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive, et soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $I_n = \int_0^1 t^n f(t) : dt$.
Montrer que : $I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}$.

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

► **Bases orthonormales, méthode de Gram-Schmidt**

EXERCICE 13. — On se place dans \mathbb{R}^3 muni produit scalaire usuel et de la base canonique B .

Soit $P = \text{Vect}(\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (1, 2, 0))$. Déterminer une base orthonormale de P .

EXERCICE 14. — On se place dans \mathbb{R}^4 muni produit scalaire usuel et de la base canonique B , et on considère le sev F de \mathbb{R}^4 défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}.$$

Déterminer une base orthonormale de F .

EXERCICE 15. — Construire une base orthonormale de \mathbb{R}^3 (muni produit scalaire usuel) dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x - y + z = 0$.

$\vec{u}(1, 1, 0)$ appartient au plan, et $\vec{n}(1, -1, 1)$ est normal au plan. Donc : $\vec{u} \wedge \vec{n}(1, -1, -2)$ appartient au plan, et est orthogonal au deux précédents.

Conclusion. La famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 (muni produit scalaire usuel) dont les deux premiers vecteurs appartiennent au plan d'équation $x - y + z = 0$.

EXERCICE 16. — Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, on considère $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$. Déterminer une base orthonormale de P .

$\vec{u}(1, -1, 0)$ et $\vec{v}(1, 1, -2)$ appartiennent au plan P , et sont orthogonaux.

Conclusion. La famille $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base orthonormale de P .

EXERCICE 17. — On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} et 2π -périodiques (et à valeurs réelles), muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt$$

Montrer que la famille $(f_n, n \in \mathbb{N}^*)$, avec $f_n(x) = \cos(nx)$, est une famille orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Il suffit de vérifier que $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ si $n \neq m$, et $\langle f_n, f_n \rangle = 1$; ce qui constitue une petite révision du formulaire de trigo.

EXERCICE 18. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

La famille $B_1 = \{1, X - 1/2\}$ est clairement une base de $\mathbb{R}_1[X]$ orthogonale pour le produit scalaire considéré.

Conclusion. La famille $B_2 = \left\{ \frac{1}{\|1\|}, \frac{1}{\|X - 1/2\|} (X - 1/2) \right\}$ est clairement une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ (pour le produit scalaire de l'énoncé).

EXERCICE 19. — On se place dans \mathbb{R}^4 muni produit scalaire usuel et de la base canonique B .

Soit $F = \text{Vect}(\vec{u} = (1, 0, 1, 0), \vec{v} = (0, 1, 1, 0), \vec{w} = (0, 0, 1, 1))$. Déterminer une base orthonormale de F .

EXERCICE 20. — On pose $E = \mathbb{R}_1[X]$. On munit E du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^2 P(i) Q(i).$$

Construire une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} X, \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - X) \right\}$ convient.

► Distance, distance à un sev et optimisation

EXERCICE 21. — (**Propriétés de la distance**). Soient E un espace préhilbertien. On note respectivement $\|\cdot\|$ et d la norme et la distance naturellement associées au produit scalaire de E . Démontrer les propriétés suivantes :

1/ $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) \geq 0$ (positivité)

2/ $\forall (u, v) \in E^2, d(u, v) = d(v, u)$ (symétrie)

3/ $\forall (u, v) \in E^2, [d(u, v) = 0] \implies [u = v]$ (séparation)

4/ $\forall (u, v, w) \in E^3, d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ (inégalité triangulaire)

En classe.

EXERCICE 22. — 1/ Montrer que l'application définie par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \int_{-1}^1 \frac{P(t) Q(t)}{1 + t^2} dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Routine.

2/ On note $\|\cdot\|$ la norme sur $\mathbb{R}_2[X]$ associée au produit scalaire ci-dessus. Calculer $\|1\|$ et $\|X\|$.

3/ Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

4/ Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. En déduire $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 \frac{(t^2 - at - b)^2}{1 + t^2} dt$

EXERCICE 23. — Déterminer $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 [t^2 - (at + b)]^2 dt$.

EXERCICE 24. — Déterminer $\lambda = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi [a \sin(t) + b \cos(t) - t]^2 dt$.

EXERCICE 25. — (**Projection orthogonale**). Dans cet exercice, E désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On note H le plan de \mathbb{R}^3 d'équation : $x + y + z = 0$; et $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la projection orthogonale sur H .

- 1) Construire une base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de \mathbb{R}^3 , telle que B' est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 , les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 appartenant à H .
- 2) Ecrire la matrice A' de p dans la base B' .
- 3) Expliciter la matrice A de p dans la base canonique B .

1) Le plan H a pour vecteur normal $\vec{u}_3(1, 1, 1)$. Les deux vecteurs $\vec{u}_1(1, -1, 0)$ et $\vec{u}_2(1, 1, -2)$ lui sont clairement orthogonaux (et appartiennent donc à H), et sont orthogonaux.

Il s'ensuit que la famille : $B' = \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_3} \right)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 , les

vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 appartenant à H .

2) Par définition de la projection orthogonale sur H , et par construction des vecteurs \vec{v}_i , on a : $p(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$; $p(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ et $p(\vec{v}_3) = \vec{0}$. La matrice A' de p dans la base B' est donc : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) D'après la formule du changement de base, on a : $A = PA'P^{-1}$, où $P = P_{BB'}$ est la matrice de passage de la base B à la base B' . D'après la question 1, on a donc : $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Puisque la base B' est orthonormale, la matrice P est orthogonale ($P \in O(3)$), d'où : $P^{-1} = {}^tP$. Il s'ensuit que :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 26. — (Symétrie orthogonale). Dans cet exercice, E désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, et B la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On note H le plan de \mathbb{R}^3 d'équation : $x - z = 0$; et $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la symétrie orthogonale par rapport à H .

- 1) Construire une base $B' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de \mathbb{R}^3 , telle que B' est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 , les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 appartenant à H .
- 2) Ecrire la matrice A' de s dans la base B' .
- 3) Expliciter la matrice A de s dans la base canonique B .

1) Le plan H a pour vecteur normal $\vec{u}_3(1, 0, -1)$. Les deux vecteurs $\vec{u}_1(0, 1, 0)$ et $\vec{u}_2(1, 0, 1)$ lui sont clairement orthogonaux (et appartiennent donc à H), et sont orthogonaux.

Il s'ensuit que la famille : $B' = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_2}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}_3} \right)$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 , les vecteurs

\vec{v}_1 et \vec{v}_2 appartenant à H .

2) Par définition de la symétrie orthogonale par rapport à H , et par construction des vecteurs \vec{v}_i , on a : $s(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$; $s(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ et $s(\vec{v}_3) = -\vec{v}_3$. La matrice A' de s dans la base B' est donc : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3) D'après la formule du changement de base, on a : $A = PA'P^{-1}$, où $P = P_{BB'}$ est la matrice de passage de la base B à la base B' . D'après la question 1, on a donc : $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Puisque la base B' est orthonormale, la matrice P est orthogonale ($P \in O(3)$), d'où : $P^{-1} = {}^tP$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

► Groupes d'automorphismes

EXERCICE 27. — (Groupe orthogonal). Soit E un espace euclidien, et soit u un endomorphisme de E . On dit que u est un **endomorphisme orthogonal** s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

- 1/ Montrer que si u est orthogonal, alors : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
- 2/ En déduire que si u est un endomorphisme orthogonal, alors u est un automorphisme de E .
- 3/ Prouver la réciproque de 1/ : si $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$, alors u est orthogonal.
- 4/ On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E . Montrer que $O(E)$ est un groupe (pour la composition des applications évidemment).

EXERCICE 28. — (**Groupe des similitudes d'un espace euclidien**). Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$). On appelle **similitude** de E une application $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\exists \lambda > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| = \lambda \|x\|.$$

Le réel λ est alors appelé **rapport** de la similitude f .

- 1) Etablir que f est une similitude de E si et seulement si :

$$\exists \lambda > 0, \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle.$$

- 2) Prouver que si f est une similitude de E , alors f est un automorphisme de E .
- 3) Etablir que si f est une similitude de E de rapport λ , alors f^{-1} est une similitude de E dont on précisera le mystérieux rapport.
- 4) On note $\text{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E . Etablir que $(\text{Sim}(E), \circ)$ est un groupe.

- 1) Supposons que f soit une similitude de E . Soient x et y dans E .

On a, d'après l'identité de polarisation : $\langle f(x), f(y) \rangle = \frac{1}{4} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x) - f(y)\|^2)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{4} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x-y)\|^2) = \frac{1}{4} (\lambda^2 \|x+y\|^2 - \lambda^2 \|x-y\|^2) \\ &= \frac{\lambda^2}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \lambda^2 \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Les vecteurs x et y étant des éléments quelconques de E , on a ainsi établi que :

$$[f \text{ est une similitude de } E] \implies [\exists \lambda > 0, \forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle]$$

La réciproque est triviale.

- 2) Supposons que f est une similitude de E de rapport $\lambda > 0$. Soit $x \in E$. On a :

$[f(x) = 0] \iff [\|f(x)\| = 0] \iff [\lambda \|x\| = 0] \iff_{\lambda \neq 0} [\|x\| = 0] \iff [x = 0]$. Ainsi $\ker f = \{0\}$, et f est donc injectif. En tant qu'endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est un automorphisme de cet espace vectoriel.

- 3) Soit f une similitude de E de rapport λ . Alors f est un automorphisme de E , et f^{-1} existe.

Soit $x \in E$. On a : $\|f(f^{-1}(x))\| = \|x\|$, et $\|f(f^{-1}(x))\| = \lambda \|f^{-1}(x)\|$. D'où : $\forall x \in E, \lambda \|f^{-1}(x)\| = \|x\|$.

Ainsi : $\forall x \in E, \|f^{-1}(x)\| = \lambda^{-1} \|x\|$. Ce qui assure que f^{-1} est une similitude de rapport λ^{-1} .

- 4) L'ensemble $\text{Sim}(E)$ est une partie de $\text{GL}(E)$ (d'après la question 2), qui contient id_E (immédiat), stable par composition (la composée de deux similitudes de rapports λ et μ est clairement une similitude de rapport $\lambda\mu$), et par passage à l'inverse d'après la question précédente.

Ainsi, $\text{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$; en particulier, $\text{Sim}(E)$ est un groupe.