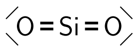
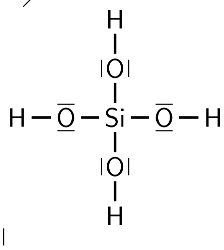
DS6 du 15/3 : Physique-chimie (3h)

Solution de l'exercice 1 : Chimie de la pointe AFM

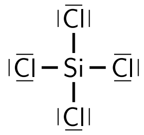
Q.1 SiO_2 : $N = 4 + 2 \times 6 = 16 \Longrightarrow D = 8$



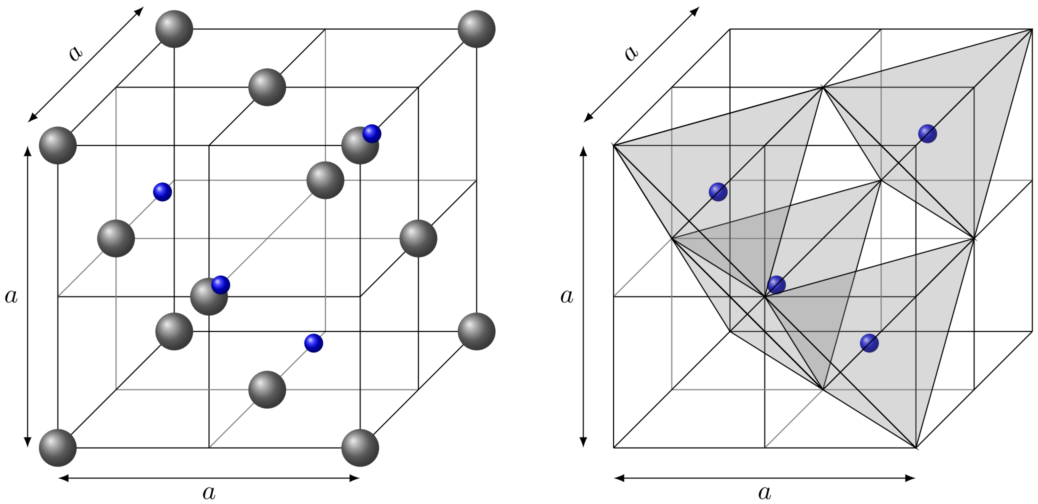
Si(OH)_4 : $N = 4 + 4 \times 6 + 4 = 32 \Longrightarrow D = 16$



SiCl_4 : $N = 4 + 4 \times 7 = 32 \Longrightarrow D = 16$



Q.2 Soit une maille cubique à face centrée et un site tétraédrique sur deux :



Q.3 Soit $P(\text{Si}) = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 = 8$ et $C = 4$

Q.4 Soit $\rho(\text{Si}) = \dfrac{P(\text{Si}) \times m(\text{Si})}{a^3} = \dfrac{P(\text{Si}) \times M(\text{Si})}{\mathcal{N}_A a^3} \Longrightarrow a = \left(\dfrac{P(\text{Si}) \times M(\text{Si})}{\mathcal{N}_A \rho(\text{Si})}\right)^{\frac{1}{3}} = 540\,\text{pm}$

Q.5 $\phi = \dfrac{P(\text{Si}) \times \frac{4}{3}\pi r(\text{Si})^3}{a^3}$ or les contacts se font entre les atomes présents sur les sites tétraédriques et les atomes du réseau CFC, on a donc $\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = 2r(\text{Si})$ on obtient alors :

$$\phi = \frac{P(\text{Si}) \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{a^3} \approx 0{,}34 < \phi(CFC)$$

Q.6 Question retirée à postériori.

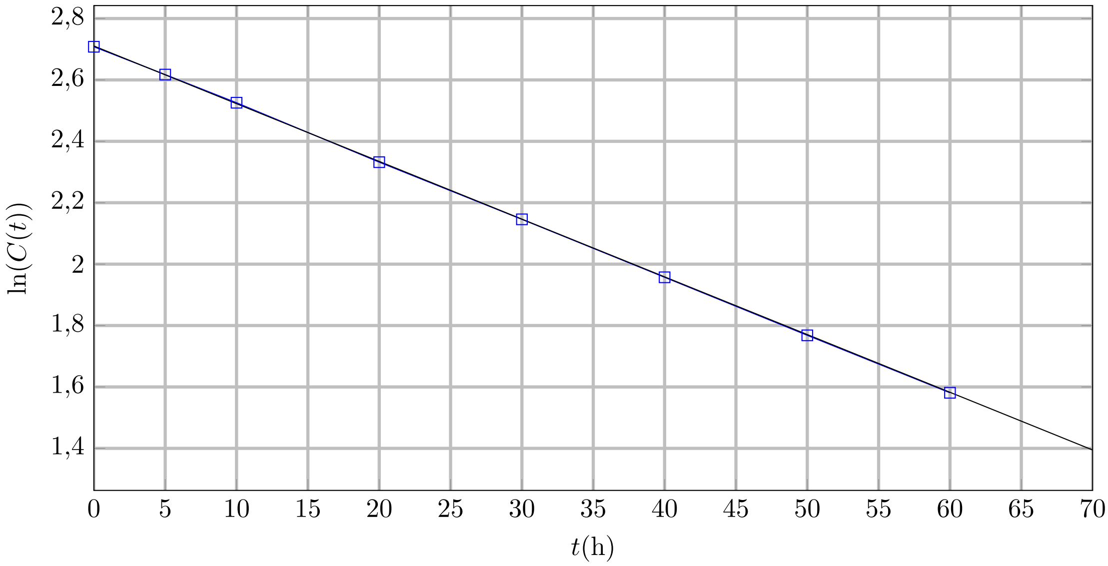
Q.7 Soit $P(\text{N}^{3-}) = P(CFC) = 4$ et $P(\text{Si}^{4+}) = 3$ coordinence pas à faire.

Solution de l'exercice 2 : Utilisation du dioxyde de titane comme catalyseur

Q.1 On a la loi d'ordre : $r = kC^n(t)$ soit $-\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = kC^n(t)$

Si $n = 1$: $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + kC(t) = 0$ soit $C(t) = C_0 e^{-kt}$ avec $C(t = 0) = C_0$

On cherche à faire la régression $Y = aX + b$ avec les $Y_i = \ln(C_i)$ et les $X_i = t_i$:



On a bien une droite, le modèle est compatible

Q.2 La régression linéaire nous donne : $k \simeq 0{,}0188\,\mathrm{h}^{-1}$

Solution de l'exercice 3 : Instrumentation rotative

Q.1 Soit $\Gamma_1 = -\alpha\omega$ donc $\mathscr{P}(\Gamma_1) = -\alpha\omega^2 < 0$ par définition des frottements, d'où $\alpha > 0$.

Q.2 **Système :** $\{$ Cylindre (J) $\}$
Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Bilan des actions mécaniques : Γ_0 et $\Gamma_1 = -\alpha\omega$
Théorème du moment cinétique scalaire : $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 + \Gamma_1$

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0 - \alpha\omega \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\omega = \frac{\Gamma_0}{J}}$$

On cherche une solution de la forme $\omega(t) = \omega_h(t) + \omega_p(t)$ tel que $\omega_h(t) = Ae^{-t/\tau}$ avec $\tau = J/\alpha$ et $\omega_p(t) = \omega_l$ une constante.

$$\omega_l = \frac{\Gamma_0}{\alpha} \qquad \Longrightarrow \omega(t) = Ae^{-t/\tau} + \omega_l \qquad \text{or } \omega(0) = 0 \Longrightarrow A + \omega_l = 0 \Longrightarrow \boxed{\omega(t) = \frac{\Gamma_0}{\alpha}(1 - e^{-t/\tau})}$$

Q.3 $\boxed{\omega_l = \dfrac{\Gamma_0}{\alpha}}$

Q.4 On applique le TMC : $J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0(1 + \gamma\cos(\Omega t)) - \alpha\omega$ or $\omega = \omega_l(1 + \epsilon)$

$$J\omega_l\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0(1 + \gamma\cos(\Omega t)) - \alpha\omega_l(1 + \epsilon) \Longleftrightarrow J\frac{\Gamma_0}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} = \Gamma_0(1 + \gamma\cos(\Omega t)) - \Gamma_0(1 + \epsilon) \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\epsilon = \frac{\alpha}{J}\gamma\cos(\Omega t)}$$

Q.5 Soit $\epsilon(t) = \epsilon_h(t) + \epsilon_p(t)$ avec $\epsilon_h(t) = Be^{-t/\tau}$ lorsque $t \gg \tau$ $\quad \epsilon_h(t) \simeq 0$.

$$\epsilon(t) \simeq \epsilon_p(t) = a\cos(\Omega t - \phi)$$

On pose $\underline{\epsilon(t)} = ae^{j(\Omega t - \phi)}$ tel que $\epsilon(t) = \mathscr{Re}\left(\underline{\epsilon}(t)\right)$:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\epsilon}}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{J}\underline{\epsilon} = \frac{\gamma}{J}e^{j\Omega t} \Longleftrightarrow \underline{\epsilon}\left(j\omega + \frac{\alpha}{J}\right) = \frac{\alpha\gamma}{J}e^{j\Omega t} \Longleftrightarrow \underline{\epsilon} = \frac{\gamma e^{j\Omega t}}{1 + j\dfrac{J\Omega}{\alpha}}$$

$$\boxed{|\underline{\epsilon}| = a = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{J\Omega}{\alpha}\right)^2}}} \qquad \arg(\underline{\epsilon}) = \Omega t - \phi = \Omega t - \arctan\left(\frac{J\Omega}{\alpha}\right) \Longrightarrow \boxed{\phi = \arctan\left(\frac{J\Omega}{\alpha}\right)}$$

Q.6 Si on ajoute un anneau massif on augmente J donc a diminue.

Les contraintes d'encombrement empêche l'utilisation d'un volant d'inertie, l'appareil doit pouvoir être manipulable dans la bouche et donc ne pas occuper un volume important.

Q.7 Soit $v_l = R\omega_l$ or $\omega_l = 400000\pi/30\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $R \simeq 0{,}5\,\mathrm{mm}$ soit $v_l \simeq 3{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Q.8 On ajoute un couple de frottement Γ_f et donc $\omega_l = \dfrac{\Gamma_0 - \Gamma_f}{\alpha}$ diminue.

Solution de l'exercice 4 : Étude de la comète 67P Churyomov - Gerasimenko

Q.1 **Système :** {Comète M (m)}
Référentiel : $\mathscr{R}$ héliocentrique supposé galiléen.
Bilan : $\overrightarrow{F} = -\mathscr{G}\dfrac{M_\odot m}{R^2}\overrightarrow{u}_r$ avec $\overrightarrow{u}_r$ le vecteur unitaire des coordonnées polaires dans le plan de l'orbite circulaire.
PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F}$ or pour une trajectoire circulaire en coordonnées polaires $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$

$$/\overrightarrow{u}_r\ :\ mR\dot{\theta}^2 = \mathscr{G}\frac{M_\odot m}{R^2} \qquad \text{or } \dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G}M_\odot}}$$

Q.2 **Généralisation à une ellipse :**

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G}M_\odot}}$$

Q.3 $\dfrac{T_c^2}{a_c^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathscr{G}M_\odot} \Longrightarrow \boxed{T_c = \sqrt{\dfrac{(2\pi a_c)^3}{2\pi\mathscr{G}M_\odot}}}$ AN : $\underline{T_c \simeq 6{,}2\,\mathrm{an}}$

Q.4 D'après la définition : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_S} = m\overrightarrow{r}\wedge\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}}$.

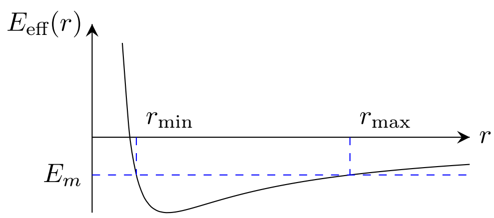
Q.5 On applique le TMC au point S :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_S}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{r}\wedge\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_S} = \overrightarrow{C^{te}} \Longrightarrow \overrightarrow{r}\perp\overrightarrow{\sigma_S} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\perp\overrightarrow{\sigma_S} \Longrightarrow \text{mouvement plan orhogonal à } \overrightarrow{\sigma_S}$$

Q.6 **Coordonnées cylindriques :** $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{u}_r$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$ soit $\overrightarrow{\sigma_S} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$ donc $\boxed{C = r^2\dot{\theta}}$.

Q.7 Soit $E_c = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$ or $\dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2} \Longrightarrow E_c = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mC^2}{2r^2}$

Énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p(r) = -\dfrac{\mathscr{G}M_\odot m}{r}$ l'énergie potentielle gravitationnelle.



$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E_m - E_{\mathrm{eff}}(r) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{E_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathscr{G}M_\odot m}{r}}$$

Soit lorsque $r = r_{\min}$ ou $r = r_{\max}$:

$$\dot{r} = 0 \Longrightarrow E_m = E_{\mathrm{eff}}(r_{\min}) = E_{\mathrm{eff}}(r_{\max})$$

Q.8 Si $E_m = E_{\mathrm{effmin}} = E_0$ alors $r_{\min} = r_{\max} = r_0$:

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}(r = r_0) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{mC^2}{r_0^3} + \frac{\mathscr{G}M_\odot m}{r_0^2} = 0 \Longrightarrow \boxed{r_0 = \frac{C^2}{\mathscr{G}M_\odot}} \Longrightarrow \boxed{E_0 = E_{\mathrm{eff}}(r = r_0) = -\frac{\mathscr{G}^2M_\odot^2 m}{2C^2}}$$

On obtient alors en $r = r_0$: $E_m = E_c(r_0) + E_p(r_0)$ soit $\boxed{E_c(r_0) + E_p(r_0) = \dfrac{\mathscr{G}^2M_\odot^2 m}{2C^2}}$

Q.9 Soit à partir du schéma : $r_{\min} = a - ae = a(1-e)$ et $r_{\max} = a + ae = a(1+e)$

Q.10 Soit $E_m = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{\mathscr{G}M_\odot m}{r} \Longleftrightarrow \boxed{r^2 + \dfrac{\mathscr{G}M_\odot m}{E_m}r - \dfrac{mC^2}{2E_m} = 0}$

$r_{\max}$ et $r_{\min}$ sont deux solutions positives si $E_m < 0$ et $\Delta = \left(\frac{\mathscr{G}M_{\odot}m}{E_m}\right)^2 + \frac{4mC^2}{2Em} > 0 \Longleftrightarrow E_m > E_0$

Alors $r^2 + \frac{\mathscr{G}M_{\odot}m}{E_m}r - \frac{mC^2}{2E_m} = (r - r_{\min})(r - r_{\max}) = 0$

Soit $r_{\min} + r_{\max} = 2a = -\frac{\mathscr{G}M_{\odot}m}{E_m} \Longrightarrow \boxed{E_m = -\frac{\mathscr{G}M_{\odot}m}{2a}}$

avec $r_{\max} = a + ae = a(1+e)$ et $r_{\min} = a - ae = a(1-e)$ on obtient :

$$\boxed{r_{\min}r_{\max} = a^2(1-e^2) = -\frac{mC^2}{2E_m}}$$

Q.11 La vitesse aérolaire de la comète est constante : $\frac{S}{T} = \frac{C}{2}$

Q.12 Kepler (loi des aires)

Q.13 Soit $\boxed{\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{r^2}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{C}{2} = C^{te}}$ la loi de Kepler.

$$\frac{S}{T} = \frac{C}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{C} \Longrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1-e^2)}{C^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathscr{G}M_{\odot}}}$$

On retrouve la loi de Kepler des périodes pour des trajectoires elliptiques.

.

· · · FIN · · ·