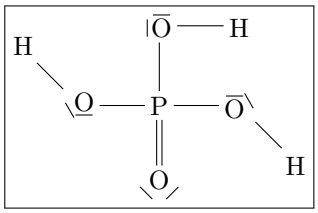
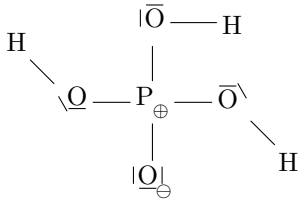
DS7 du 16/3 : Physique-chimie (3h)

Solution de l'exercice 1 : L'hydrolyse de l'ATP

Q.1 On compte le nombre d'électrons de valence : $N = \underset{3H}{3} \times 1 + \underset{P}{5} + \underset{4O}{4} \times 6 = 32$ soit $D = 16$ doublets.

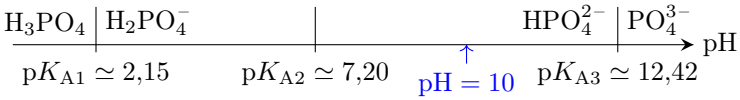


ou



Q.2 L'échantillon est dilué d'un facteur 11 et refroidi à 25 °C : il s'agit d'une trempe, permettant de réduire dratiquement la vitesse d'hydrolyse de l'ATP, d'autant plus qu'on passe en milieu basique (pH=10), où cette cinétique est beaucoup plus lente.

Q.3 On trace le diagramme de prédominance suivant :



À pH=10, l'ion HPO_4^{2-} (hydrogénophosphate) est prédominant.

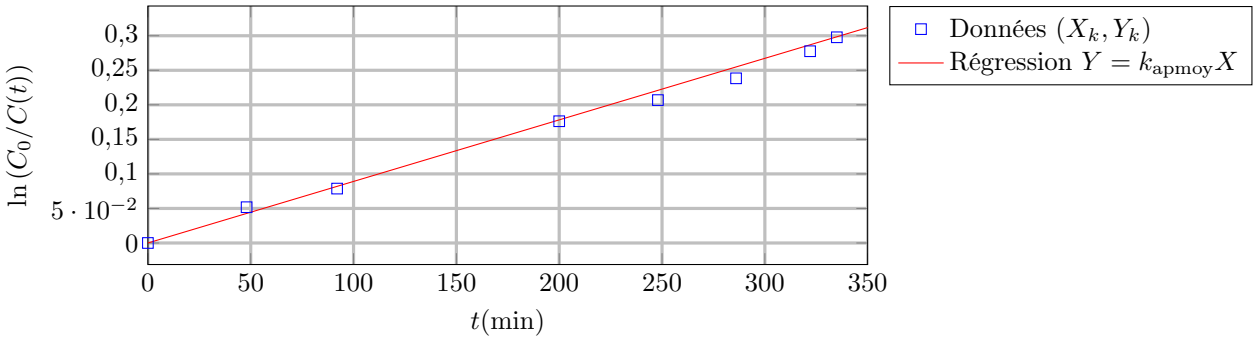
Q.4 On dresse le tableau d'avancement :

	ATP	+	$CH_2O(l)$	=	ADP	+	$H_3PO_4(aq)$
$t = 0\,s$	C_0		excès		0		0
t	$C_0 - x(t)$		excès		$x(t)$		$x(t)$

avec $x(t) = [H_3PO_4](t)$ on a $C(t) = C_0 - x(t)$ donc $\boxed{C(t) = C_0 - [H_3PO_4](t)}$.

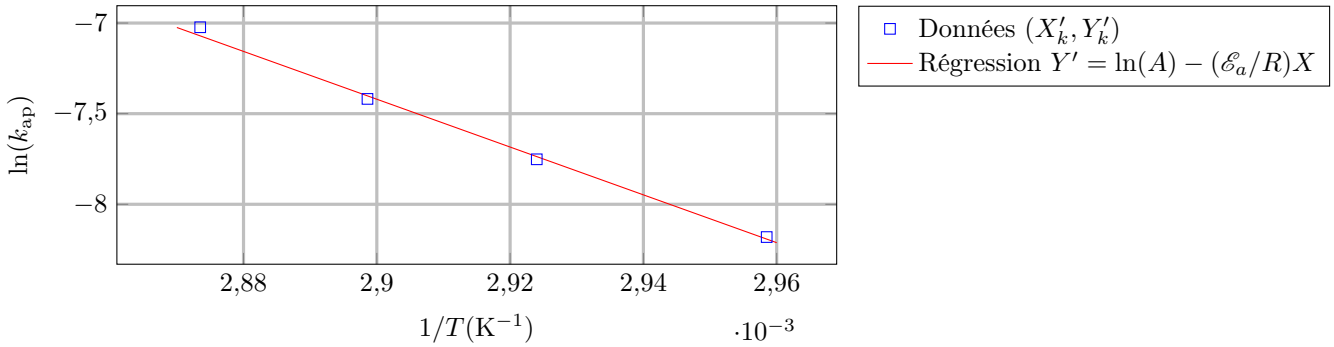
Q.5 Supposons $r = -\dfrac{d[ATP]}{dt} = k_{ap}[ATP]$ soit $-\dfrac{dC}{dt} = k_{ap} \times C(t)$ alors : $C(t) = C_0 e^{-k_{ap}t} \Longrightarrow \boxed{\ln\left(\dfrac{C_0}{C(t)}\right) = k_{ap}t}$: linéaire.

Q.6 On trace donc : $Y = \ln(C_0/C(t))$ en fonction de $X = t$:



On obtient bien une droite passant par l'origine, ce qui valide la loi de vitesse postulée.
En faisant la moyenne de tous les $Y/X = k_{app}$ on en déduit : $k_{ap} \simeq 8{,}91 \times 10^{-4}\,min^{-1}$.

Q.7 D'après la loi d'Arrhenius : $\ln(k_{ap}) = \ln(A) - \dfrac{\mathscr{E}_a}{R} \times \dfrac{1}{T}$



On trace $Y' = \ln(k_{\text{ap}})$ en fonction de $X' = \dfrac{1}{T}$. On effectue la régression linéaire $Y' = aX + b$:

La droite de pente $a \simeq -1{,}32 \times 10^4$, on en déduit $-\dfrac{\mathscr{E}_a}{R} \simeq -1{,}32 \times 10^4\,\text{K}$

$$\underline{\mathscr{E} \simeq 109\,\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Solution de l'exercice 2 : Mécanique du solide et formule 1 !!

Q.1 Pour une distribution discrète de masse :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

s'exprimant en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ tel que $[J_\Delta] = ML^2$.

Les expressions $J_\Delta = \dfrac{1}{2}mR$ et $J_\Delta = 2m\dfrac{L}{R}$ ne sont pas homogènes à un moment d'inertie.

L'expression $J_\Delta = mRL$ ne convient pas car seule la distance à l'axe de rotation Δ intervient dans J_Δ (donc pas de dépendance en L).

Seule $\boxed{J_\Delta = \dfrac{1}{2}mR^2}$ correspond au moment d'inertie du cylindre de rayon R et de masse m.

Q.2 **Système :** {solide (S)}

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

BAME : Couple moteur Γ constant.

TMC scalaire : $\left.\dfrac{\text{d}L_\Delta(S)}{\text{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = J_\Delta\ddot{\theta} = \Gamma$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = \frac{\Gamma}{J_\Delta} = C^{te} > 0}$$

Q.3 **BAME :** Couple résistif γ constant.

TMC scalaire : $J_\Delta\ddot{\theta} = -\gamma$

$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\dfrac{\gamma}{J_\Delta}}$

Q.4 Par intégration de $\ddot{\theta}(t) = -\dfrac{\gamma}{J_\Delta}$ on obtient la vitesse angulaire :

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \frac{\gamma}{J_\Delta}t}$$

avec $\omega(0) = \omega_0$. On cherche l'instant τ tel que $\omega(t = \tau) = 0$ soit $\boxed{\tau = \dfrac{\omega_0 J_\Delta}{\gamma}}$.

Q.5 On cherche le nombre N de tours effectués avant l'arrêt du cylindre tel que $\theta(t = \tau) = N \times 2\pi$ avec

$$\theta(t) = -\frac{\gamma}{2J_\Delta}t^2 + \omega_0 t + \cancel{\theta_0}$$

Soit $2\pi N = -\dfrac{\cancel{\gamma}}{2\cancel{J_\Delta}} \times \dfrac{\omega_0^2 \cancel{J_\Delta^2}}{\cancel{\gamma^2}} + \omega_0^2\dfrac{J_\Delta}{\gamma}$

$$\boxed{N = \frac{\omega_0^2 J_\Delta}{4\pi\gamma}}$$

Q.6 **Données :** $\tau = 10\,\text{min} = 600\,\text{s}$

$R = 20 \times 10^{-2}\,\text{m} \qquad |\gamma| = 20\,\text{N} \cdot \text{m}$

$\omega_0 = 60\,000\,\text{tour} \cdot \text{min}^{-1} \approx 6283\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

avec $J_\Delta = \dfrac{1}{2}mR^2$ soit $m = \dfrac{2J_\Delta}{R^2}$

de plus : $J_\Delta = \dfrac{\gamma\tau}{\omega_0} \qquad \boxed{m = \dfrac{2\gamma\tau}{\omega_0 R^2}}$ $\underline{\text{AN} : m \approx 95\,\text{kg}}$ proche des 100 kg proposés.

Q.7 On cherche $\omega_0' = \omega(t = \Delta t = 8\,\text{min})$

$$= -\frac{\gamma}{J_\Delta}\Delta t + \omega_0 = -\frac{\cancel{\gamma}\omega_0}{\cancel{\gamma}\tau}\Delta t + \omega_0$$

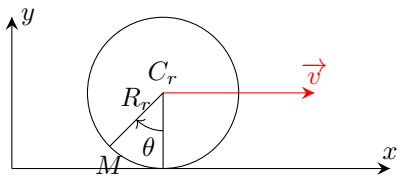
$$\boxed{\omega_0' = \omega_0\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)}$$

AN : $12\,000\,\text{tour}\cdot\text{min}^{-1}$

Q.8 La distance élémentaire $\mathrm{d}x$ parcourue par le centre de masse C_r de la roue est proportionnelle à l'angle élémentaire $\mathrm{d}\theta$ tant que la roue roule sans glisser :

$$\mathrm{d}x = R_r\mathrm{d}\theta$$

d'où $\dot{x} = R_r\dot{\theta}$ soit $v = R_r\omega_r$ $\quad\boxed{\omega_r = \frac{v}{R_r}}$ AN : $\omega_r = 1{,}7\times10^2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 1{,}6\times10^3\,\text{tour}\cdot\text{min}^{-1}$.



Q.9 Il faut effectuer un Bilan d'énergie cinétique en lisant attentivement l'énoncé :

$$\Delta E_c(S) = \Delta E_c(4\text{ roues}) + \Delta E_c(\text{Formule 1 + pilote})$$

avec $\Delta E_c(S) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2$ l'énergie cinétique du volant d'inertie.

$E_{cf}(4\text{ roues}) = 4\times\frac{1}{2}J_r\omega_r^2 = 4\times\frac{1}{2}\frac{1}{2}m_rR_r^2\frac{v'^2}{R_r^2}$

$E_{cf}(\text{Formule 1 + pilote}) = \frac{1}{2}Mv'^2$

$E_{ci}(4\text{ roues}) + E_{ci}(\text{Formule 1 + pilote}) = m_rv^2 + \frac{1}{2}Mv^2$ d'où : $\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 = \left(m_r + \frac{M}{2}\right)(v'^2 - v^2)$

$$\boxed{\Delta v^2 = \frac{J_\Delta\omega_0^2}{2m_r + M}}$$

Q.10 AN : $\Delta v^2 \approx 639\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ soit
$v' \approx 61\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 220\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.
Augmentation de 10% de la vitesse.

Solution de l'exercice 3 : Coût énergétique de la mise en orbite d'un satellite.

Q.1 L'énergie potentielle associé est de la forme $E_p(r) = \frac{K}{r}$ avec ici $K = -\mathscr{G}mM_T$ d'où $\boxed{E_p(r) = -\frac{\mathscr{G}mM_T}{r}}$

Q.2 **Théorème du momen cinétique** évalué au centre de force O :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{C^{te}}}$$

Le mouvement du satellite est contenu dans le plan $(\mathscr{P}) \perp \overrightarrow{L_O}(M)$ et passant par le centre de force O.

Q.3 En repérage polaire : $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{OM}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}} = mr\vec{u}_r\wedge(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z = \overrightarrow{C^{te}}$

D'où : $\boxed{L_O = mr^2(t)\dot{\theta}(t) = C^{te}}$

Q.4 Par application du **Théorème de l'énergie mécanique** au système satellite soumis à la seule force centrale conservative :

$$\boxed{\Delta E_m(M) = W(\vec{F}) = 0} \Longrightarrow \boxed{E_m(M) = C^{te}}$$

Ici : $E_m(M) = E_c(M) + E_p(M) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \frac{K}{r} \underset{L_O^2 = m^2r^4\dot{\theta}^2}{\Longrightarrow} E_m(M) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_O^2}{mr^2} + \frac{K}{r}$

$$\boxed{E_{\text{peff}}(r) = \frac{L_O^2}{2mr^2} - \frac{\mathscr{G}mM_T}{r}}$$

Q.5 **Système :** $\{M(m)\}$ satellite supposé ponctuél, **référentiel** géocentrique supposé galiléen.

Bilan : $\overrightarrow{F} = \dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{u}_r = \dfrac{-\mathscr{G}mM_T}{r^2}\overrightarrow{u}_r$

PFD : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{F} \Longleftrightarrow -m(r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta) = \dfrac{-\mathscr{G}mM_T}{r^2}\overrightarrow{u}_r$ orbite circulaire de rayon $r = C^{te}$

$$/\overrightarrow{u}_r \ : \ -mr\dot{\theta}^2 = \frac{-\mathscr{G}mM_T}{r^2} \Longrightarrow r^2\dot{\theta}^2 = v^2 = \frac{\mathscr{G}M_T}{r} \Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_T}{r}} = C^{te}}$$

Q.6 On en déduit alors que : $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2(M) \Longrightarrow \boxed{E_c = \dfrac{1}{2}m\dfrac{\mathscr{G}M_T}{r}}$, comme $E_p = -\dfrac{\mathscr{G}mM_T}{r}$ on a :

$$\boxed{E_m(M) = -\frac{1}{2}\frac{\mathscr{G}mM_T}{r} = C^{te} < 0}$$ correspond à un état lié.

Q.7 $\underline{\text{AN : } E_{mb} = -1{,}0 \times 10^{11}\,\text{J}}$ et $\underline{E_{mh} = -2{,}0 \times 10^{10}\,\text{J}}$.

Q.8 Il faut traduire le fait que r_b et r_h sont solutions de l'équation : $\boxed{E_m(r) = E_{\text{peff}}(r_{\text{b,h}}) = C^{te}}$

Soit $E_m = \dfrac{L_O^2}{2mr_{\text{b,h}}^2} - \dfrac{\mathscr{G}M_Tm}{r_{\text{b,h}}} \Longleftrightarrow \boxed{E_m r_{\text{b,h}}^2 + \mathscr{G}M_Tmr_{\text{b,h}} - \dfrac{L_O^2}{2m} = 0}$ où $\begin{cases} r_\text{b} + r_\text{h} = -\dfrac{\mathscr{G}M_Tm}{E_m} \\ r_\text{b} + r_\text{h} = 2a \end{cases}$

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathscr{G}M_Tm}{2a} < 0}$$ énergie mécanique du satellite sur son orbite de transfert elliptique.

Q.9 On rappelle qu'à l'apogée r_h et au périgé r_b, l'énergie potentielle effective s'identifie à l'énergie mécanique E_{mt} du satellite sur son orbite de transfert elliptique.

$$E_{mt} = E_{\text{peff}}(r = r_\text{h}) = E_{\text{peff}}(r = r_b)$$

On relève alors la valeur de l'énergie potentielle effective de l'orbite de transfert pour $r_\text{b} = 8{,}0 \times 10^3\,\text{km}$ (plus de précision) qui correspond également à l'énergie mécanique de l'ellipse de transfert :

$$\underline{E_{mt} \simeq -30\,\text{GJ}}$$

Q.10 Énergie mécanique du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon r_b : $\underline{E_{mb} \simeq -100\,\text{GJ}}$ compatible avec Q.7

Énergie mécanique du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon r_h : $\underline{E_{mh} \simeq -20\,\text{GJ}}$ compatible avec Q.7.

car les trajectoires circulaires correspondent aux minimum d'énergie potentielle effective.

Q.11 La variation d'énergie mécanique à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse (r_b, E_{mb}) à l'orbite elliptique de transfert $(2a, E_{mt})$ vaut :

$$\boxed{\Delta E_m = E_{mt} - E_{mb}}$$ AN : $\underline{\Delta E_m \simeq 70\,\text{GJ} > 0}$ (apport énergie au satellite)

Q.12 Pour réaliser une telle opération, il faut une masse m_c de carburant :

$$\boxed{m_c = \frac{\Delta E_m}{q}}$$ AN : $\underline{m_c \simeq 1{,}4 \times 10^3\,\text{kg}}$ (proche de la masse du satellite !)

· · · FIN · · ·