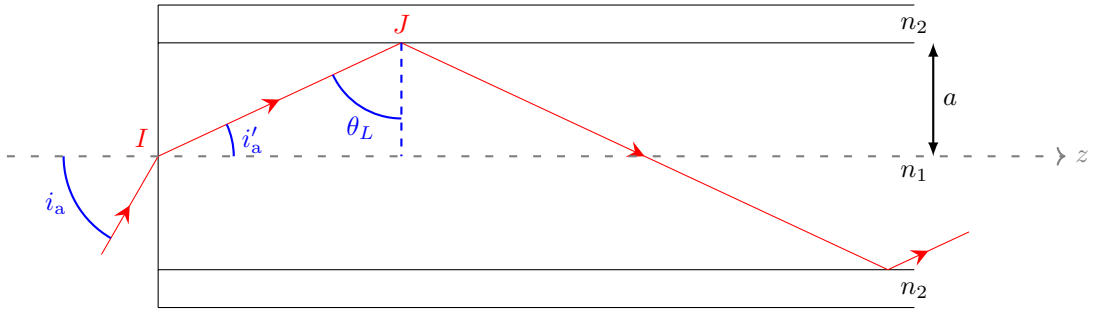
# DS7 du 5/4 : Physique-chimie (3h)

## Solution de l'exercice 1 : Fibre optique à saut d'indice

**Q.1** Soit l'incidence en $J$, on veut que le rayon soit guidé dans le cœur donc on se place en condition de réflexion totale où $\theta > \theta_L$ :




On applique la loi de Snell Descartes en $J$ : $n_1 \sin(\theta_L) = n_2 \sin(\pi/2) \quad \Longrightarrow \sin(\theta_L) = \dfrac{n_2}{n_1}$ On applique la loi de Snell Descartes en $I$ : $n_0 \sin(i_a) = n_1 \sin(i'_a)$

or $i'_a = \dfrac{\pi}{2} - \theta_L \quad \sin(i'_a) = \cos(\theta_L)$

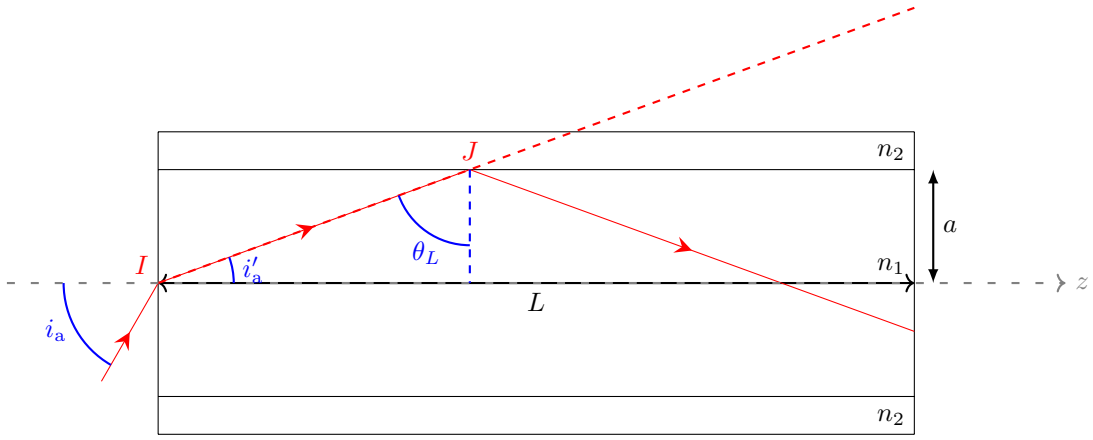
d'où $n_0 \sin(i_a) = n_1 \cos(\theta_L)$ or $\cos(\theta_L) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta_L)}$

$$\boxed{i_a = \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}\right)}$$

or $\theta > \theta_L$ pour que la réflexion totale soit possible, comme $i' = \dfrac{\pi}{2} - \theta$ on a $i' < \dfrac{\pi}{2} - \theta_L$ soit $i < i_a$.

**Q.2** Soit $ON = n_0 \sin i_{\max} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ AN : $\underline{N = 0{,}3631}$

**Q.3** Soit $\delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ avec $\tau_1$ la durée de propagation du rayon qui arrive avec une incidence normale et $\tau_2$ la durée de propagation du rayon qui arrive avec une incidence $i_a$ :

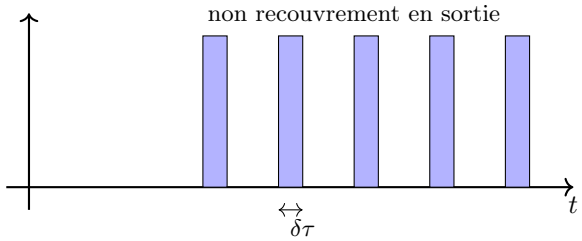


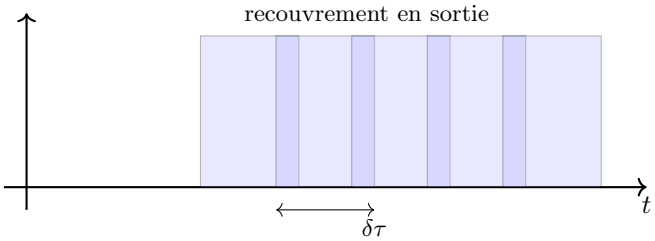

Soit $\tau_1 = \dfrac{L}{v_1} \Longrightarrow \boxed{\tau_1 = \dfrac{Ln_1}{c}}$

Soit $\tau_2 = \dfrac{d}{v_1} = \dfrac{dn_1}{c}$ avec $d = \dfrac{L}{\sin(\theta_L)} = \dfrac{Ln_1}{n_2} \Longrightarrow \boxed{\tau_2 = \dfrac{Ln_1^2}{cn_2}}$

Soit $\boxed{\delta\tau = \dfrac{Ln_1}{c}\left(\dfrac{n_1}{n_2} - 1\right)}$ $\qquad$ $\underline{\text{AN : } \delta\tau \simeq 1{,}58 \times 10^{-7}\,\text{s}}$

**Q.4** On néglige $T_1$ la largeur de l'impulsion : chaque impulsion initiale s'étale pour donner un pavé de taille $\delta\tau$.



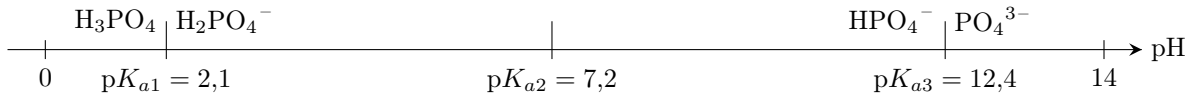



La valeur minimale de la période vaut $\Delta t_m$ donc la fréquence à ne pas dépasser sous peine de mélange infâme est $BP_m = 1/\delta\tau = \dfrac{c}{n_1 L}\dfrac{n_2}{n_1 - n_2}$.
Pour $L = 1\,\text{km}$, $BP_m \simeq 6{,}3\,\text{MHz}$.

## Solution de l'exercice 2 : Déphosphatation des eaux

**Q.1** Soit $\text{MgPO}_4\text{NH}_4(\text{s}) = \text{Mg}^{2+}(\text{aq}) + \text{PO}_4{}^{3-}(\text{aq}) + \text{NH}_4{}^{+}(\text{aq})$ avec $K_s = \dfrac{[\text{Mg}^{2+}]\,[\text{PO}_4{}^{3-}]\,[\text{NH}_4{}^{+}]}{(c^\circ)^3}$

**Q.2** Soit :




**Q.3** a) À pH $= 9{,}2$ on a $\text{p}K_{a2} + 1 < \text{pH} < \text{p}K_{a3} - 1$ donc l'espèce majoritaire est $\text{HPO}_4{}^{2^-}$.

$$C_P = [\text{H}_3\text{PO}_4] + [\text{H}_2\text{PO}_4{}^-] + [\text{HPO}_4{}^{2-}] + [\text{PO}_4{}^{3-}] \approx [\text{HPO}_4{}^{2-}]$$

b) Soit $K_{a3} = \dfrac{[\text{PO}_4{}^{3-}]\,[\text{H}_3\text{O}^+]}{c^\circ\,[\text{HPO}_4{}^{2-}]} \Longrightarrow [\text{PO}_4{}^{3-}] = [\text{HPO}_4{}^{2-}]\,K_{a3}10^{\text{pH}}$

$$\boxed{[\text{PO}_4{}^{3-}] = C_P 10^{\text{pH}-\text{p}K_{a3}}} \qquad \text{AN : } [\text{PO}_4{}^{3-}] \approx 3\times10^{-6}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

c) Soit $\text{pH} \approx \text{p}K_{a4} \Longrightarrow [\text{NH}_4{}^+] \approx [\text{NH}_3] \approx \dfrac{C_N}{2} = 7{,}5\times10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

d) On cherche $[\text{Mg}^{2+}]_{\text{lim}}$ tel que $Q_r = K_s \Longrightarrow K_s \approx \dfrac{[\text{Mg}^{2+}]_{\text{lim}}\,C_P C_N}{2(c^\circ)^3}$

Soit $[\text{Mg}^{2+}]_{\text{lim}} \approx \dfrac{2K_s(c^\circ)^3}{C_N C_P} \approx 4{,}44\times10^{-4}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

e) Soit $m_{\text{min}} = M(\text{MgPO}_4\text{NH}_4)\,[\text{Mg}^{2+}]_{\text{lim}}\,V$ AN : $m_{\text{min}} = 211\,\text{g}$

## Solution de l'exercice 3 : Proteus One

**Q.1** **Système :** $\{M(m)\}$
**Référentiel :** terrestre supposé galiléen noté $\mathscr{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
**Bilan des forces :** $\vec{F}_L = e\vec{E}$ avec $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = E_0\vec{u}_x$ et $\vec{P}$ négligeable.
**PFD :** $m_0\vec{a}(M)_{\mathscr{R}} = \vec{F} \Longleftrightarrow \vec{a}(M)_{\mathscr{R}} = \dfrac{e}{m_0}\vec{E} \Longleftrightarrow \vec{a}(M)_{\mathscr{R}} = \dfrac{eE_0}{m_0}\vec{u}_x$
L'accélération est un vecteur constant, le mouvement est donc uniformément accéléré.
**TEM :** $\Delta\mathscr{E}_m = 0$ car la force de Lorentz est conservative

$$\mathscr{E}_{m\text{i}} = \mathscr{E}_{m\text{f}} \quad \Longleftrightarrow 0 + eU_M = \frac{1}{2}m_0 v_1^2 + 0 \qquad \Longrightarrow \boxed{v_1 = \frac{2eU_M}{m_0}} \qquad \underline{\text{AN : } v_1 4{,}4\times10^6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

**Q.2** Dans le cylindre le force exercée sur le proton est : $\vec{F} = e\vec{v}\wedge\vec{B}$ et il reçoit une puissance $\mathscr{P}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = 0$ car la force est orthogonale à la vitesse par définition.
**TPC :** $\dfrac{\text{d}\mathscr{E}_c}{\text{d}t} = \mathscr{P}(\vec{F}) = 0 \quad \Longleftarrow \mathscr{E}_c = C^{te} \Longrightarrow v = C^{te}$
Le mouvement est uniforme.
**Repère de Frenet :** $\vec{v} = v_1\vec{u}_T$ et $\vec{a}(M) = \dfrac{\text{d}v_1}{\text{d}t}\vec{u}_T + \dfrac{v_1^2}{R}\vec{u}_N$ soit $\vec{a}(M) = \dfrac{v_1^2}{R}\vec{u}_N$
**PFD :** $m_0\vec{a}(M) = \vec{F} \quad m_0\dfrac{v_1^2}{R_1}\vec{u}_N = ev_1B\vec{u_T}\wedge\vec{u_N} \qquad \Longleftrightarrow m_0\dfrac{v_1^2}{R_1}\vec{u}_N = -ev_1B\vec{u}_N$

$$\boxed{R_1 = -\frac{m_0 v_1}{eB}} \qquad \underline{\text{AN : } |R_1| \simeq 9{,}1\,\text{mm}}$$

**Q.3** On calcule la durée $\Delta t$ pour parcourir la moitié du cercle :

$$\Delta t = \frac{\pi R_1}{v_1} = \frac{\pi m_0}{eB}$$

L'expression de $\Delta t$ ne dépend que des propriétés de la particules ($e$ et $m_0$) et du champ magnétique ($B$).

**Q.4** On veut alors que $u = -U_M$ pour que l'accélération se fasse dans le bon sens, on doit alors avoir $f = \dfrac{1}{2\Delta t} = f_c$. AN : $f \simeq 76\,\mathrm{MHz}$.

**Q.5** **TEM :** $\Delta\mathscr{E}_m = 0$ car la force de Lorentz est conservative

$$\mathscr{E}_{m\mathrm{i}} = \mathscr{E}_{m\mathrm{f}} \iff \frac{1}{2}m_0 v_1^2 + eU_M = \frac{1}{2}m_0 v_2^2 + 0 \implies \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2eU_M}{m_0} + v_1^2} = v_1\sqrt{2}} \qquad \text{AN : } v_2 6{,}2 \times 10^6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

On calcule alors $R_2 = -\dfrac{m_0 v_2}{eB} = R_1\sqrt{2}$. AN : $|R_2| \simeq 13\,\mathrm{mm}$

**Q.6** En supposant que la fréquence cyclotron est toujours valable en relativité :

$$f_c' = \frac{eB}{2\pi m} = \frac{eB}{2\pi m_0}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La fréquence dépend maintenant de la vitesse, lorsque la vitesse augmente, on voit que $f_c'$ diminue.

## Solution de l'exercice 4 : Existence d'une atmosphère à la surface des planètes

**Q.1** Système : $\{\ M(m)\ \}$
Référentiel : Géocentrique supposé galiléen
TEM : $\Delta\mathscr{E}_m = 0 \implies \mathscr{E}_m = C^{te}$ soit $\mathscr{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_l^2 - \dfrac{\mathscr{G}\mathscr{M}_\mathscr{T}}{R_T}$

On obtient : $v_l = \sqrt{\dfrac{2\mathscr{G}M_T}{R_T}}$ soit en fonction du diamètre $\boxed{v_l = \sqrt{\dfrac{4\mathscr{G}M_T}{D_T}}}$

AN : $v_l(\text{Mercure}) = 4240\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_l(\text{Vénus}) = 10\,361\,\mathrm{m\cdot m^{-1}}$, $v_l(\text{Terre}) = 11\,179\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $v_l(\text{Mars}) = 5011\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

**Q.2** Pour un GP monoatomique $\langle\mathscr{E}_c\rangle = \dfrac{3}{2}k_bT = \dfrac{1}{2}mu^2$ avec $u^2 = \langle v^2\rangle$ la vitesse quadratique moyenne.

Soit $u = \sqrt{\dfrac{3k_BT}{m}}$ avec $M = \mathscr{N}_A m$ la masse molaire et $R = k_B\mathscr{N}_A$ : $\boxed{u = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}}$

AN : $u(\mathrm{N_2}) = 517\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $u(\mathrm{H_2}) = 1934\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

**Q.3** On voit que $u(\mathrm{H_2})$ est du même ordre de grandeur que la vitesse de libération sur Mercure et Mars. On en déduit que l'atmosphère ne sera pas stable sur ces planètes. Celle-ci est plus stable sur Vénus et la Terre.

**Q.4** On cherche donc $u(\mathrm{N_2}) \sim v_l$ sur Terre soit $\dfrac{3RT}{M(\mathrm{N_2})} \sim \dfrac{4\mathscr{G}\mathscr{M}_\mathscr{T}}{D_T}$

$$T \sim \frac{4\mathscr{G}M_T M(\mathrm{N_2})}{3RD_T} \qquad \text{AN : } T \sim 1 \times 10^5\,\mathrm{K}$$

## Solution de l'exercice 5 : Cycle moteur théorique et peu performant

**Q.1** En utilisant $C_{P\mathrm{m}} - C_{V\mathrm{m}} = R$ et $\gamma = \dfrac{C_{P\mathrm{m}}}{C_{V\mathrm{m}}}$ :

$$C_{P\mathrm{m}} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad C_{V\mathrm{m}} = \frac{R}{\gamma - 1} \qquad \implies \quad C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \quad C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

**Q.2** Transformation $0 \longrightarrow 1$ : isochore

**Q.3** On applique l'équilibre mécanique car le piston est décollé de la cale $A$ : $P_1 = P_0 + \dfrac{mg}{S}$
AN : $P_1 = 1{,}1\,\mathrm{bar}$
On applique la loi des gaz parfait dans l'état 0 : $P_0V_A = nRT_0$ et dans l'état 1 : $P_1V_A = nRT_1$

$$T_1 = T_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \iff \boxed{T_1 = T_0\left(1 + \frac{mg}{SP_0}\right)} \qquad \text{AN : } T_1 = 330\,\mathrm{K}$$

**Q.4** La première loi de Joule : $\Delta U_{01} = C_V\Delta T_{01} = C_V(T_1 - T_0)$

$$\Delta U_{01} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) \iff \boxed{\Delta U_{01} = \frac{P_0V_1}{\gamma - 1}\left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right)} \qquad \text{AN : } \Delta U_{01} = 8{,}25\,\mathrm{J}$$

**Q.5** Transformation $1 \longrightarrow 2$ : quasi-satique et monobare donc isobare

**Q.6** La transformation est isobare donc $P_2 = P_1$

On applique la loi des gaz parfaits dans l'état 1 : $P_1 V_A = nRT_1$ et dans l'état 2 : $P_2 V_B = nRT_2$

$$\boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{V_B}{V_A}\right)} \qquad \underline{\text{AN : } T_2 = 909\,\text{K}}$$

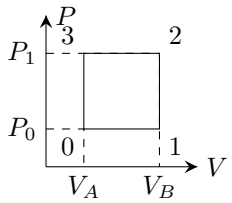
**Q.7** Loi de Joule : $\Delta U_{12} = C_V (T_2 - T_1)$

$$\boxed{C_V = \frac{P_0 V_A}{\gamma - 1}\left(\frac{T_2 - T_1}{T_0}\right)} \qquad \underline{\text{AN : } \Delta U_{12} = 165\,\text{J}}$$

**Q.8** Par définition : $W_{12} = \displaystyle\int_{V_A}^{V_B} -P_{\text{ext}} \mathrm{d}V$ avec $P_{\text{ext}} = P_1$

$$W_{12} = -P_1(V_B - V_A) = -nR(T_2 - T_1) \iff \boxed{W_{12} = -\frac{P_0 V_A}{T_0}(T_2 - T_1)} \qquad \underline{\text{AN : } W_{12} = -66\,\text{J}}$$

**Q.9** Transformation $2 \longrightarrow 3$ : isochore et transformation $3 \longrightarrow 0$ isobare




**Q.10** On calcule l'aire de la courbe : $W = -(P_1 - P_0)(V_B - V_A) = -\dfrac{mg}{S}(V_B - V_A)$ $\underline{\text{AN : } W = 6{,}7\,\text{J}}$

**Q.11** AN : $\eta = 2,8\%$

.

**· · · FIN · · ·**