

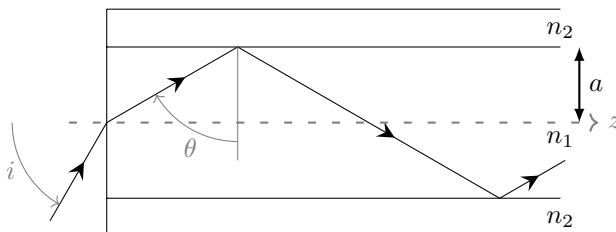
DS7 du 5/4 : Physique-chimie (3h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'aux consignes suivantes :

- Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.
- Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.
- Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).
- Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**.
- La calculatrice est **autorisée**, le téléphone interdit.
- Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

Exercice 1 : Fibre optique à saut d'indice

On considère une fibre optique constituée d'un cœur cylindrique de rayon a et d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice n_2 inférieur à n_1 et de rayon b . Les faces d'entrée et de sortie sont perpendiculaires à l'axe du cylindre (Oz) formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice n_0 qui sera pris égal à l'indice de l'air pour les applications numériques.



- Q.1** Un rayon lumineux arrive en O . On appelle i l'angle d'incidence sur la surface d'entrée de la fibre. Déterminer en fonction de n_0 , n_1 et n_2 la condition que doit satisfaire i pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur. On appelle angle d'acceptance i_a de la fibre la valeur maximale de i . Donner l'expression de i_a .
- Q.2** On appelle ouverture numérique ON de la fibre la quantité $ON = n_0 \sin(i_a)$. Exprimer ON en fonction de n_1 et n_2 . Application numérique : calculer la valeur de ON pour $n_1 = 1,456$ (silice) et $n_2 = 1,410$ (silicone).
- Q.3** On envoie dans la fibre un faisceau lumineux avec tous les angles d'incidence i compris entre 0 et i_a . Calculer la différence $\delta\tau$ entre la durée maximale et la durée minimale de propagation d'un bout à l'autre de cette fibre. On exprimera le résultat en fonction de la longueur L de la fibre, des indices n_1 et n_2 et de la vitesse de la lumière dans le vide c . Application numérique : $L = 1,00$ km, donner la valeur de $\delta\tau$.
- Q.4** Le signal transporté par la fibre est constitué d'impulsions lumineuses d'une durée T_1 à intervalle régulier T . Quelle valeur minimale de T faut-il choisir pour que les impulsions soient distinctes à la sortie de la fibre ? Proposer une définition de la bande passante en bits (ou nombre d'impulsions) par seconde. Comparer la valeur de la bande passante obtenue ici avec celle d'un téléphone portable (64 bits par seconde) et celle de la télévision (100 Mbits par seconde).

Exercice 2 : Déphosphatation des eaux

Toutes les équations bilans seront écrites de façon à ce que les coefficients stœchiométriques soient des nombres entiers qui n'admettent pas de diviseur commun.

Masse molaire atomique des éléments exprimée en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$: H : 1; O : 16; C : 12; N : 14; Mg : 24,3; Cl : 35,5.

Une teneur élevée en phosphore a des conséquences écologiques néfastes comme l'eutrophisation des lacs. Pour éviter cet inconvénient différents procédés sont mis en œuvre pour réduire la teneur en phosphore dans les eaux à la sortie des stations d'épuration. Un procédé envisageable consiste à précipiter le phosphore sous forme de struvite de formule $\text{MgPO}_4\text{NH}_4(\text{s})$.

Données :

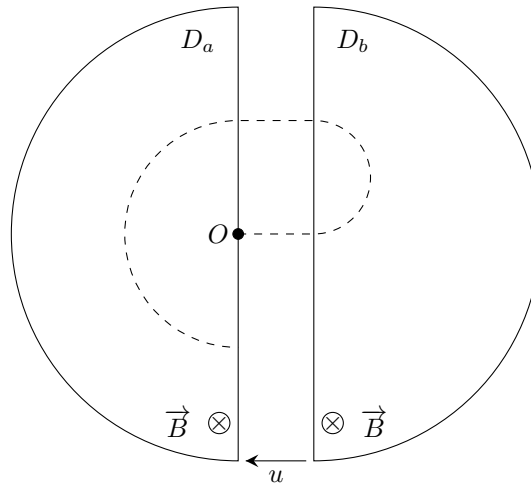
- Toutes les constantes d'équilibres sont données à 25°C .
- Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$.
- Constantes d'acidité : $\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_2\text{PO}_4^-$: $K_{a1} = 10^{-2,1}$; $\text{H}_2\text{PO}_4^-/\text{HPO}_4^{2-}$: $K_{a2} = 10^{-7,2}$; $\text{HPO}_4^{2-}/\text{PO}_4^{3-}$: $K_{a3} = 10^{-12,4}$; $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$: $K_{a4} = 10^{-9,25}$;
- Équilibre de dissolution de la struvite : $\text{MgPO}_4\text{NH}_4(\text{s}) = \text{Mg}^{2+}(\text{aq}) + \text{PO}_4^{3-}(\text{aq}) + \text{NH}_4^+(\text{aq})$ Produit de solubilité de la struvite : $K_s = 10^{-11}$.

- Q.1** Exprimer le produit de solubilité de la struvite en fonction des concentrations.
- Q.2** Tracer le diagramme de prédominance des diverses formes du phosphore (H_3PO_4 , H_2PO_4^- , HPO_4^{2-} et PO_4^{3-}) en phase aqueuse en fonction du pH.
- Q.3** Un effluent aqueux contient une concentration totale en phosphore $C_P = [\text{H}_3\text{PO}_4] + [\text{H}_2\text{PO}_4^-] + [\text{HPO}_4^{2-}] + [\text{PO}_4^{3-}] = 4 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et une concentration totale $C_N = [\text{NH}_4^+] + [\text{NH}_3] = 15 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'azote. Le pH de cet effluent est maintenu égal à 9,2.
- Justifier qu'à ce pH, $C_P \approx [\text{HPO}_4^{2-}]$.
 - Exprimer $[\text{PO}_4^{3-}]$ en fonction de $[\text{HPO}_4^{2-}]$ et de K_{a3} . Faire l'application numérique.
 - Justifier qu'à ce pH, $[\text{NH}_4^+] \simeq \frac{C_N}{2}$.
 - On introduit, sans modification de volume, du chlorure de magnésium MgCl_2 , sel totalement soluble dans les conditions utilisées, afin d'entraîner la précipitation du phosphate PO_4^{3-} en struvite. À quelle condition sur la concentration initiale en Mg^{2+} observe-t-on la précipitation de la struvite ?
 - En déduire la masse minimale $m_{\min}$ de chlorure de magnésium que l'on doit introduire dans 5 m^3 d'effluent pour faire apparaître le précipité de struvite.

Exercice 3 : Proteus One

Le synchrocyclotron Proteus One, mis en service en 2016 au Centre Antoine Lacassagne de Nice permet de réaliser des traitements en protonthérapie de haute énergie (235 MeV). Le principe de fonctionnement simplifié du cyclotron est présenté ci-dessous :

Les deux demi-cylindres horizontaux («Dees» D_a et D_b) sont creux. Dans un vide très poussé, il y règne un champ magnétique $\vec{B}$ (avec $B = 5,0 \text{ T}$) uniforme et permanent. Dans le mince espace entre les deux demi-cylindres, une tension alternative u de haute fréquence f et de valeur maximale $U_M = 100 \text{ kV}$ crée un champ électrique alternatif $\vec{E}$ perpendiculaire aux faces en regard des demi-cylindres.



Le proton possède une masse $m_0 = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et une charge $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$. La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Q.1** On considère un proton introduit en O avec une vitesse négligeable. La tension u appliquée est alors $u = U_M$. Dessiner le champ électrique $\vec{E}$ associé et montrer que le mouvement du proton est rectiligne et uniformément accéléré jusqu'à l'entrée du demi-cylindre D_b . Par une méthode énergétique, déterminer puis calculer sa vitesse v_1 à l'entrée du demi-cylindre D_b .
- Q.2** Le proton décrit alors un demi-cercle de rayon R_1 dans le demi-cylindre D_b soumis au champ magnétique $\vec{B}$. Montrer que la norme de la vitesse du proton n'évolue pas dans le demi-cylindre. Déterminer et calculer R_1 .
- Q.3** Montrer que la durée de la trajectoire dans le demi-cylindre ne dépend pas de la vitesse de la particule. On introduira la fréquence cyclotron $f_c = \frac{eB}{2\pi m_0}$.
- Q.4** Lorsque le proton ressort du demi-cylindre D_b , il est de nouveau soumis au champ électrique $\vec{E}$. Quelle fréquence f doit posséder ce champ pour que le proton soit de nouveau accéléré ? Calculer f .
- Q.5** Quelle est la vitesse v_2 du proton lorsqu'il pénètre dans le demi-cylindre D_a ? Déterminer le rayon R_2 du demi-cercle décrit par le proton dans le demi-cylindre. La trajectoire du proton ressemble donc à une sorte de spirale divergente, le rayon du demi-cercle dans chaque Dee augmentant à chaque accélération par le champ électrique.

Q.6 Les protons devenant très énergétiques, l'évolution de leur masse m suit la loi relativiste :

$$m = \gamma m_0 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Montrer que la fréquence f'_c de parcours des demi-cercles n'est alors plus constante. Comment évolue-t-elle lorsque la vitesse des protons augmente ? Dans un synchrocyclotron, la fréquence f évolue ainsi au fur et à mesure de l'augmentation de la vitesse des particules accélérées.

Exercice 4 : Existence d'une atmosphère à la surface des planètes

Données :

- $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI}$
- $M_T = 5,976 \times 10^{24} \text{ kg}$
- $M(\text{H}_2) = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- $M(\text{N}_2) = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

	Diamètre à l'équateur (km)	Rapport masse sur masse de la Terre : $\frac{M}{M_T}$
Mercure	4878	0,055
Vénus	12104	0,815
Terre	12756	1
Mars	6794	0,107

- Q.1** Calculer la vitesse de libération pour chacune des quatre planètes telluriques (Mercure, Vénus, Terre, Mars).
- Q.2** En considérant que les gaz sont monoatomique, calculer la vitesse quadratique moyenne pour le dihydrogène et le diazote à une température de 300 K
- Q.3** Conclure quant à la présence possible d'une atmosphère sur ces planètes.
- Q.4** Quel devrait être l'ordre de grandeur de la température pour que les molécules de diazote échappent à l'attraction terrestre ?

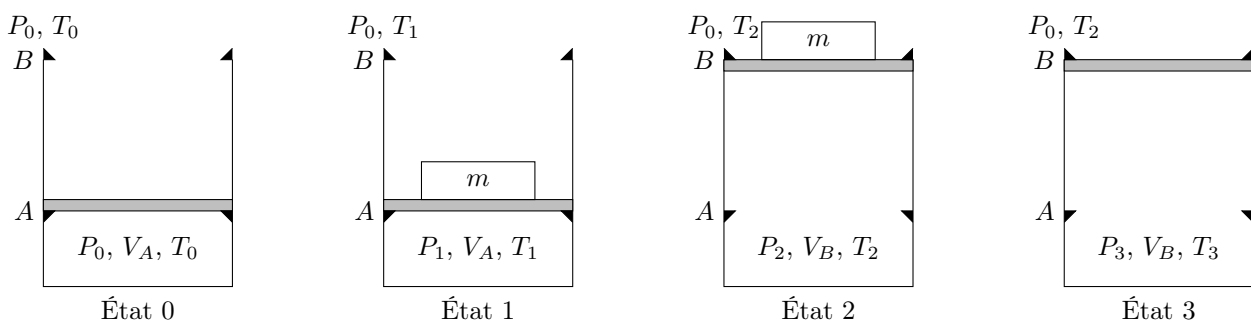
Exercice 5 : Cycle moteur théorique et peu performant

Données :

- $V_B = 1 \text{ L}$,
- $V_A = 330 \text{ mL}$,
- Les capacités thermiques du gaz C_{Pm} et C_{Vm} respectivement à pression et à volume constants sont supposées indépendantes de la température.
- On rappelle que : $R = C_{Pm} - C_{Vm}$ et $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}$ avec $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.
- Les différentes transformations seront supposées quasi-statiques.

On imagine un cylindre aux parois diathermanes (perméables à la chaleur), fermé par un piston. Le piston, de masse négligeable, peut glisser sans frottement entre 2 cales A et B, sa section est S.

Dans l'état initial, le piston est en A, le cylindre enferme un volume V_A d'air supposé gaz parfait, de coefficient γ , à la température de l'extérieur : T_0 , pression P_0 (gaz dans l'état 0 : P_0, V_A, T_0).



On place une masse m sur le piston et on chauffe très doucement le gaz par un moyen approprié, non représenté sur le schéma, jusqu'à ce que le piston décolle juste de la cale A (gaz dans l'état 1 : P_1, V_A, T_1).

Puis, on maintient le chauffage jusqu'à ce que le piston arrive juste en B (gaz dans l'état 2 : P_2, V_B, T_2), le chauffage est alors arrêté.

On ôte m et on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à ce que le piston décolle juste de B (gaz dans l'état 3 : P_3, V_B, T_3).

On laisse toujours refroidir jusqu'à atteindre l'équilibre thermique avec l'extérieur T_0 , alors, le piston revient en A (gaz dans l'état 0), le cycle est terminé.

- Q.1** Exprimer les capacités thermiques à pression et à volume constants C_P et C_V du gaz en fonction de n (quantité de matière de gaz enfermé), R , γ , puis en fonction de P_0 , V_A , T_0 , γ .
- Q.2** Quelle est la nature de la transformation de 0 à 1 subie par le gaz ?
- Q.3** Exprimer la pression P_1 et la température T_1 en fonction de P_0 , T_0 , m , g et S . Faire l'application numérique.
- Q.4** Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_{01} du gaz au cours de cette transformation en fonction de C_V , T_1 , T_0 puis en fonction de P_0 , T_1 , T_0 , V_A , et γ . Faire l'application numérique.
- Q.5** Quelle est la nature de la transformation 1 à 2 subie par le gaz ?
- Q.6** Exprimer la température T_2 en fonction de T_1 , V_A , V_B . Faire l'application numérique.
- Q.7** Exprimer la variation d'énergie interne ΔU_{12} du gaz au cours de cette transformation en fonction de C_V , T_1 et T_2 puis en fonction de P_0 , T_0 , T_1 , T_2 , V_A et γ . Faire l'application numérique.
- Q.8** Exprimer le travail mécanique reçu par le gaz W_{12} au cours de cette transformation en fonction de fonction de P_0 , T_0 , T_1 , T_2 et V_A . Faire l'application numérique.
- Q.9** Quelles sont les natures de transformations 2 à 3 et 3 à 0 subies par le gaz ? Représenter le cycle dans un diagramme (P, V) .
- Q.10** Exprimer le travail W reçu par le gaz au cours du cycle en fonction de m , g , V_A , V_B et S . Faire l'application numérique.
- Q.11** On définit le rendement du moteur $\eta = \frac{-W}{\Delta U_{01} + \Delta U_{12} - W_{12}}$. Faire l'application numérique.
- ... FIN ...**