CB1 du 14/01 : Physique (4h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements.

Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.

Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.

Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).

Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**. La calculatrice est **autorisée**, le téléphone interdit.

Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

Exercice 1 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer :

On s'intéresse à la résolution d'équations du mouvement dans une approche classique afin d'étudier le mouvement d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un ystème à un degré de liberté considéré comme oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec ou sans amortissement, et peut être soumise à une excitation externe.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (**figure 1**).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ, pouvant subir une excitation externe de force $\overrightarrow{F}_{\text{exc}}$, et se déplaçant sur un support (**figure 2**). Le ressort représente la rigidité de l'ensemble du support de la plateforme. L'amortisseur permet de prendre en compte l'effet de l'eau environnante et la force d'escitation externe celui des vagues qui frappent périodiquement la plateforme. La masse est supposée se déplacer selon une seule direction parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.

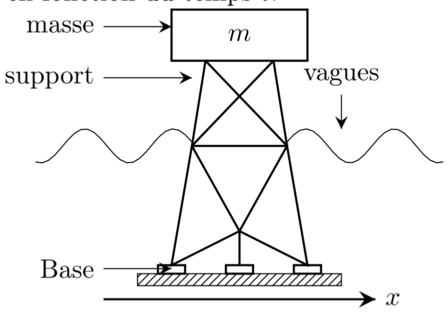


Figure 1 - Plateforme en mer soumise aux vagues marines.

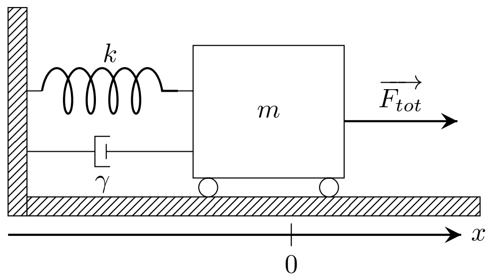


Figure 2 - Système masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) et excitation externe ($\overrightarrow{F}_{\text{esc}}$).

Les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$. La force totale $\overrightarrow{F}_{\text{tot}}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale $\overrightarrow{R}_{\text{N}}$ de la base horizontale, à la force de frottement $\overrightarrow{F}_d$, à la force de rappel $\overrightarrow{F}_k$ du ressort, au poids $\overrightarrow{P}$ de la masse et à la force $\overrightarrow{F}_{\text{esc}}$ d'excitation externe. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0\,\text{m}$. En l'absence d'action de l'amortisseur, la masse se déplace sur la base horizontale sans frottements.

Q.1 En effectuant une projection sur l'axe (Ox), montrer que $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R_N}$ n'interviennent pas dans le bilan des forces.

1 Ressort sans amortissement et sans excitation

Q.2 Démontrer que l'équation du mouvement de la masse correspond à l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

Q.3 La solution de cette équation prend la forme générale suivante :

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + B_0 \sin(\omega_0 t)$$

avec A_0 et B_0 deux coefficients réels. Exprimer ω_0 en fonction des grandeurs caractéristiques du système et donner sa signification physique. De plus, en remarquant qu'à $t = 0\,\text{s}$: $x(t) = x_0$ et $\dot{x}(t) = \dot{x}_0$, déterminer les expressions de A_0 et de B_0 en fonction de x_0, $\dot{x}_0$ et de ω_0.

Q.4 On cherche à reformuler l'équation précédente sous une forme plus compacte du type :

$$x(t) = R_0 \cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

Donner les expression de R_0 et de ϕ_0 en fonction de x_0, v_0 et de ω_0.

Q.5 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracer R_0, x_0 et $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Q.6 En utilisant les expressions des énergies cinétique $K(t)$ et potentielle $U(t)$ du système, montrer que l'énergie totale $E(t)$ du système est alors :

$$E(t) = \frac{kR_0^2}{2} \tag{2}$$

Justifier le résultat obtenu.

Q.7 Représenter qualitativement $E(t)$, $K(t)$ et $U(t)$ en fonction de t.

2 Ressort avec amortissement et sans excitation

Q.8 La force de frottement que l'amortisseur exerce sur la masse est considérée comme linéaire, c'est-à-dire proportionnelle au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ de celle-ci : $\overrightarrow{F}_d = -\gamma\overrightarrow{v}$, avec γ constante d'amortissement (> 0). En considérant une projection sur l'axe Ox, démontrer que la position de la masse en fonction du temps suit l'équation du mouvement ci-après

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

avec ω_0 défini en question **Q.3** et ζ à exprimer en fonction de γ, k et m.

Q.9 Dans le cas où $\zeta < 1$, exprimer $x(t)$ en fonction de deux constantes d'intégration A_d et B_d dont on donnera l'expression en fonction de x_0, $\dot{x}_0$, ζ, ω_0 et $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$.

On utilisera pour cela les mêmes conditions initiales que celles utilisées en question **Q.3**.

Q.10 Montrer alors que l'on peut obtenir une forme du type

$$x(t) = R_d e^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_d t - \phi_d) \tag{4}$$

avec R_d et ϕ_d à préciser.

Q.11 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $R_d e^{-\zeta\omega_0 t}$, x_0 et $2\pi/\omega_d$.

Q.12 Donner l'expression de $E(t)$ et commenter les cas où $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$.

Q.13 À L'aide d'un bilan de puissance instantannée, montrer que E est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

Q.14 On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = \tau_d$, avec τ_d : période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (4) et en considérant que $\zeta \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \simeq 2\pi\zeta \tag{5}$$

Q.15 Le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en **figure 3**.

En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure, déterminer k, ζ et γ.

Comment ce tracé serait modifié en fonction de la valeur de ζ ?

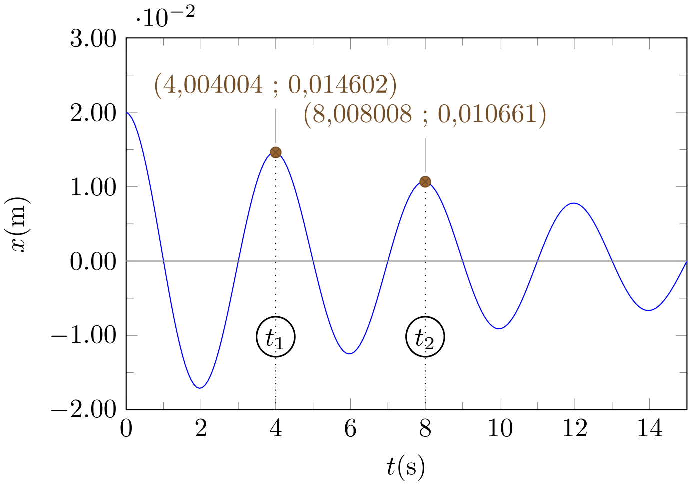


Figure 3 - Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse $m = 110$ tonnes en fonction du temps t (en s). Les deux temps t_1 et t_2 mentionnés en question **Q.14** sont indiqués.

3 Ressort avec amortissement et avec excitation

On envisage enfin le cas où le système est soumis à la fois aux effets d'amortissement et d'excitation.

On se limite ici à la réponse à une excitation harmonique sinusoïdale de pulsation ω produite par une force extérieure au système

$$\overrightarrow{F}_{\text{exc}}(t) = F_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_x \tag{6}$$

avec $\overrightarrow{u}_x$ vecteur unitaire sur l'axe Ox et on se place dans le cas traité précédemment pour l'étude de l'amortisseur, c'est-à-dire $\zeta < 1$.

On admet de plus dans ce qui suit que la réponse du système dans le cas où amortisseur et excitation sont pris en compte peut s'écrire comme somme de la solution donnée par l'équation (**??**) et de la contribution due à l'excitation :

$$x_{\text{exc}}(t) = X \cos(\omega t - \phi) \tag{7}$$

Q.16 Montrer que l'équation différentielle caractérisant le système devient alors :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \tag{8}$$

Q.17 En utilisant l'équation (7) et en privilégiant une représentation complexe, vérifier que :

$$\begin{cases} X = \dfrac{F_0}{m} \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} \\ \tan(\phi) = \dfrac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega} \end{cases} \tag{9}$$

Q.18 Exprimer la grandeur $M = \dfrac{X}{F_0/k}$ en fonction de $r = \omega/\omega_0$ et expliciter le sens physique de M.

Q.19 Trouver la condition sur r puis sur ω pour laquelle M est maximale.

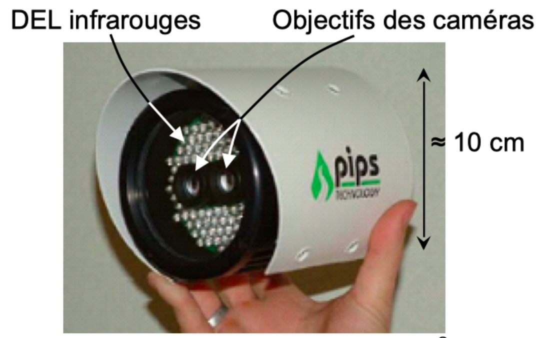
Q.20 Si l'on considère une période moyenne des vagues en mer de 8 s, que peut-on conclure sur le mouvement de la plateforme ?

Exercice 2 : Camera de contrôle des plaques d'immatriculation

Pour diminuer le nombre de véhicules circulant dans le centre ville et réduire ainsi les embouteillages, la pollution et le bruit qu'ils engendrent, plusieurs grandes agglomérations (Londres, Singapour, Stockholm) utilisent un système de péage urbain.

Différentes technologies sont mises en oeuvre pour détecter les véhicules entrant dans la zone de circulation taxée. Le système londonien, appelé London Congestion Charge (mis en place en 2003) utilise un réseau de 500 caméras installées à chaque point permettant d'entrer ou de sortir de la zone payante. Les images obtenues sont ensuite analysées par un algorithme LAPI (Lecture Automatique des Plaques d'Immatriculation) qui génère une liste des véhicules ayant circulé dans le centre ville, ce qui déclenche la facturation d'une taxe.

Ces systèmes doivent être robustes, peu coûteux, ne nécessiter aucun réglage et être fonctionnels dans des conditions de luminosité très variées. Le modèle retenu (ci-contre) comporte deux caméras identiques : l'une enregistrant dans le domaine visible et l'autre dans le proche infrarouge grâce un filtre stoppant les radiations visibles. Un ensemble de diodes électroluminescentes (DEL) émettant des flashes de longueur d'onde respective 810 nm et 950 nm entoure les caméras et permet d'illuminer la plaque d'immatriculation.



caméra P362 de la société PIPS®

Les spécifications du constructeur sont les suivantes :

Le capteur CCD (Charge Coupled Device) de ces caméras est un rectangle de diagonale 1/4 " (0,635 cm) et est découpé en 752 x 582 pixels (largeur x hauteur) ; les pixels sont des carrés tous identiques, de côté a.

Pour réduire le coût, les risques de panne et les réglages lors de l'installation, ces caméras ont une distance focale image fixe. Le constructeur propose différents modèles destinés à enregistrer les plaques d'immatriculation à une distance de mesure déterminée L. Le tableau suivant résume les modèles disponibles :

Modèle de caméra	1	2	3	4	5
Focale f'	35,0 mm	25,0 mm	16,0 mm	12,0 mm	8,0 mm
Distance de mesure L	20,0 m	14,5 m	9,0 m	7,0 m	4,5 m

Tableau 1

La norme britannique concernant les plaques d'immatriculation est la suivante :

Les plaques doivent mesurer 110 mm de hauteur et 520 mm de largeur. Les caractères doivent avoir une hauteur de 79 mm et une largeur de 50 mm, l'épaisseur du trait étant fixée à 14 mm.

1 Dimensionnement des caméras

Les caméras sont identiques et constituées d'une lentille d'objectif de distance focale image f' qui forme sur le capteur CCD une image de la plaque d'immatriculation.

La **figure 4** illustre cette configuration (les échelles relatives ne sont pas respectées).

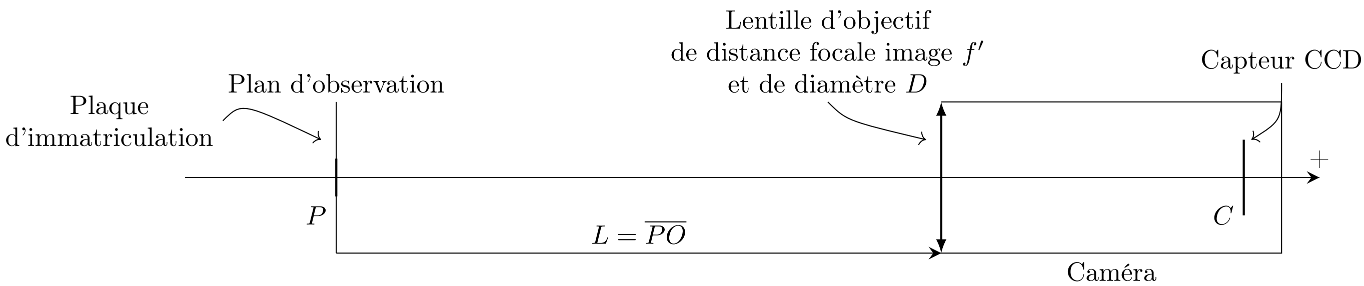


Figure 4 -

Q.1 Exprimer la distance $\overline{OC}$ (distance entre la lentille et l'image réelle) en fonction de $L = \overline{PO}$ (distance entre l'objet réel et la lentille) et $f' = \overline{OF'}$ (distance focale image de la lentille). Justifier pourquoi la lentille doit nécessairement être convergente.

Q.2 Donner la condition de projection que doivent vérifier f' (distance focale image de la lentille) et $\overline{PC}$ (distance entre l'objet réel et son image réelle) pour que cette opération soit possible.

Q.3 Écrire le grandissement γ en fonction de L et f'.

Q.4 En tenant compte des valeurs numériques du **Tableau 1**, simplifier l'expression de $\overline{OC}$ obtenue à la question **Q2**. Commenter

Q.5 Simplifier de même l'expression de γ. Calculer la valeur numérique du grandissement γ pour ces cinq modèles de caméras (répondre avec 3 chiffres significatifs). Commenter.

Pour les questions suivantes, γ sera pris égal à la moyenne de ces cinq valeurs.

Q.6 Déterminer la largeur et la hauteur du capteur CCD en millimètres. En déduire la valeur numérique de la longueur a du côté d'un pixel de ca capteur.

Q.7 En déduire les dimensions du champ de vue dans le plan d'observation. Est-il suffisant d'installer une caméra par rue permettant d'accéder au centre ville ?

Q.8 Déterminer la taille de l'image d'un des caractères de la plaque d'immatriculation sur le capteur CCD en micromètres, puis en pixels.

Q.9 Le dimensionnement de la caméra est imposé par une valeur optimale de γ qui repose sur un compris entre deux contraintes antagonistes : préciser lesquelles.

Q.10 Quels problèmes se poseraient si le dispositif ne filmait que dans le domaine visible ? Quels sont les avantages à filmer une seconde image en infrarouge ?

2 Profondeur de champ

Bien que ces caméras ne disposent pas de dispositif de mise au point (leur distance focale est fixe), il est néanmoins possible de visualiser des plaques d'immatriculation qui ne sont pas rigoureusement situées à la distance L spécifiée par le constructeur (cf. **Tableau 1**).

Le but de cette partie est de déterminer la profondeur de champ Z, c'est-à-dire la longueur de la zone de l'espace où l'objet peut-être placé afin que la caméra en fournisse une image considérée comme nette.

Le document-réponse «Optique», à rendre avec la copie, comporte différentes figures sur lesquelles un objet ponctuel est situé sur l'axe optique (les constructions ne sont pas à l'échelle et on pour seul but d'illustrer le phénomènre). Le diamètre de la lentille est $D = 1{,}00\,\text{cm}$.

Sur la première figure, l'objet est situé en P_0 à la distance L spécifiée par le constructeur.

Q.11 Compléter cette figure en représentant le trajet des deux rayons lumineux issus de P_0 et frappant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés. Représenter la position de l'image C_0 de ce point P_0 par la lentille d'objectif. *(Un soin particulier est attendu dans la réalisation de la construction dont la démarche doit être rigoureusement justifiée.)*

Le capteur CCD est positionné dans le plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par C_0. L'object ponctuel P_1 est maintenant placé à une distance $\Delta_1 = \overline{P_0P_1} > 0$ de P_0.

Q.12 Compléter la seconde figure du document-réponse en y représentant :

a) le plan du capteur CCD (en reportant le point C_0 de la construction de la question **Q.11**).

b) le trajet des deux rayons lumineux issus de P_1 et frappant la lentille en deux points extérieurs diamétralement opposés. Son image est notée C_1.

Ce faisceau ne forme pas une image ponctuelle sur le capteur mais un disque de diamètre $d_1 > 0$ qui doit être inférieur à la taille a d'un pixel pour que l'image soit nette : $0 < d_1 < a$.

Q.13 Montrer que le diamètre de la tache image, noté d_1, peut s'exprimer sous la forme :

$$d_1 = \beta \frac{f'\Delta_1}{(L-f')(L-\Delta_1)} \text{ où } \beta \text{ est un facteur à expliciter.}$$

Q.14 Compléter la troisième figure, dans le cas où $\overline{P_0P_2} = -\Delta_2 < 0$ ($\Delta_2 > 0$ est une distance).

Le diamètre de la tache image peut alors s'exprimer sous la forme $d_2 = \beta \dfrac{f'\Delta_2}{(L-f')(L+\Delta_2)}$.

Q.15 Simplifier les expressions de d_1 et d_2 sachant que $f' \ll L$.

Q.16 Exprimer, en fonction de a, L, D et f', les distances $\Delta_{1\text{lim}}$ et $\Delta_{2\text{lim}}$ telles que la tache image sur le capteur ait un diamètre égal à la taille d'un pixel.

Q.17 Calculer les valeurs numériques des distances $\Delta_{1\text{lim}}$ et $\Delta_{2\text{lim}}$ pour la caméra 3, en prenant $a = 7{,}00\,\mu\text{m}$.

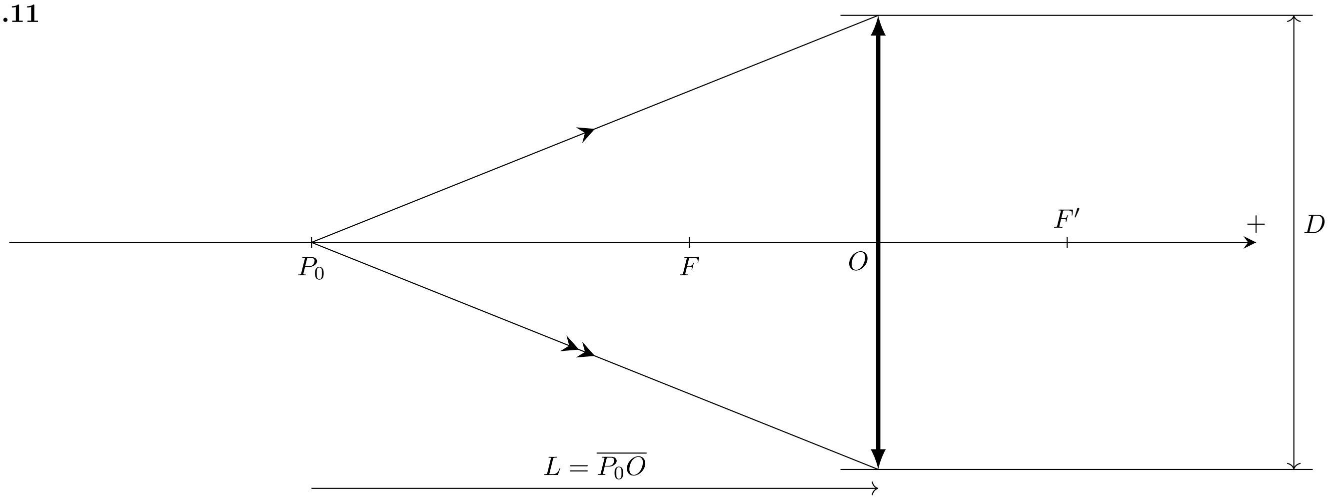
Q.18 Déterminer l'expression de la profondeur de champ Z en fonction de f', D, a et L.

Q.19 Simplifier cette expression en tenant compte des valeurs numériques de l'énoncé.

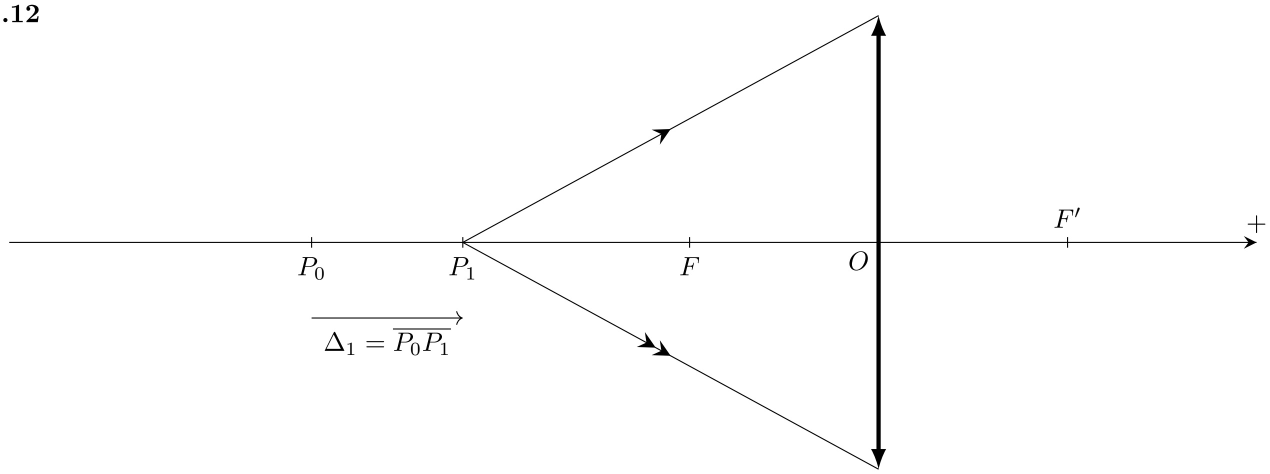
Q.20 Commenter le choix d'une lentille de petit diamètre pour réaliser cette caméra.

Document réponse « Optique », à compléter et à rendre avec la copie

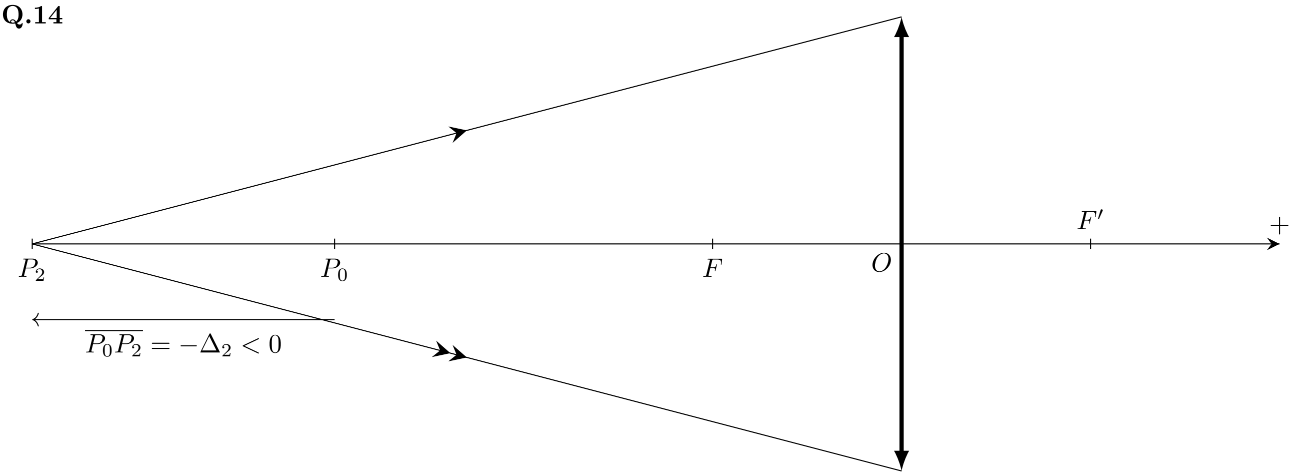
Q.11



Q.12



Q.14



· · · FIN · · ·