

CB2 du 14/01 : Physique (4h)

Il sera accordé la plus grande importance au soin apporté à la copie ainsi qu'à la clarté des raisonnements.

Chaque exercice sera traité sur une copie double séparée.

Vous laisserez un espace au début de votre devoir pour la correction.

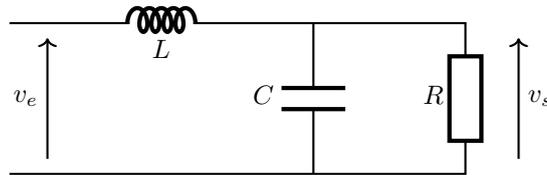
Chaque réponse devra être formulée à l'aide d'une phrase verbale (sujet - verbe - complément).

Les formules littérales doivent être **encadrés** et les applications numériques **soulignées**. La calculatrice est **autorisée**, le téléphone interdit.

Vous veillerez à ne pas mélanger valeur numérique et expression littérale.

Exercice 1 : Modulation et démodulation

On considère le filtre représenté ci-dessous :



La tension d'entrée est fournie par un générateur et s'écrit $v_e(t) = V_{em} \cos(\omega t + \varphi_e)$ où V_{em} est la valeur maximale et ω la pulsation. La tension de sortie est alors notée $v_s(t) = V_{sm} \cos(\omega t + \varphi_s)$. L'étude du filtre sera menée en utilisant la notation complexe \underline{v}_e et \underline{v}_s de ces deux tensions :

$$\underline{v}_e(t) = V_{em} e^{j(\omega t + \varphi_e)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_s(t) = V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi_s)}$$

- Q.1** Représenter le circuit en basse fréquences et indiquer la limite de v_s dans ce cas.
Q.2 Faire de même pour les hautes fréquences.
Q.3 Quelle est alors la nature de ce filtre ?
Q.4 Montrer que la fonction de transfert complexe de ce filtre s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + 2j\lambda \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On précisera les expressions de H_0 , λ et ω_0 en fonction des paramètres des composants du circuit. Vérifier la concordance avec l'analyse qualitative.

- Q.5** Comment s'exprime l'amplitude V_{sm} du signal de sortie en fonction de $|\underline{H}|$ et de l'amplitude V_{em} du signal d'entrée ?
Q.6 Comment s'exprime la phase φ_s du signal de sortie en fonction de la phase φ de \underline{H} et de la phase φ_e du signal d'entrée ?

Dans toute la suite, on ajuste les composantes du circuit pour avoir $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Q.7 Montrer que $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$.

- Q.8** Tracer sur votre copie le diagramme de Bode en gain de ce filtre en précisant les grandeurs portées sur les axes ainsi que quelques valeurs remarquables de ces grandeurs. Faire apparaître également les asymptotes en haute et basse fréquences ainsi que la pulsation de coupure à -3 dB.
Q.9 Tracer le diagramme de Bode en phase du filtre. On précisera les asymptotes en basse et haute fréquence. Que vaut la phase φ de \underline{H} pour $\omega = \omega_0$?

Exercice 2 : Mécanique du solide et formule 1 !!

Le SREC, acronyme de Système de Récupération de l'énergie Cinétique (en anglais KERS pour Kinetic Energy Recovery System) est un système de freinage, surtout utilisé dans le monde de l'automobile, qui récupère une partie de l'énergie cinétique générée par le freinage au lieu de la disperser sous forme de chaleur dans les freins.

L'invention du SREC dans sa version mécanique a été revendiquée dans les années 1950 par le physicien américain Richard Feynman.

En 2009, les écuries Ferrari et McLaren ont intégré à leurs véhicules de formule 1 un volant d'inertie ou SREC (Système de Récupération d'Énergie Cinétique). L'objectif était de récupérer l'énergie pendant le freinage et de la restituer pendant certaines phases d'accélération.

L'intérêt du SREC est une accélération plus intense que celles des voitures non équipées.

L'inconvénient est, outre les coûts de développement, le poids du système qui pénalise la performance de la voiture.

Ce système a notamment permis à Kimi Räikkönen de gagner le grand prix de Belgique en 2009 au volant de sa Ferrari.



L'énergie peut être récupérée de manière mécanique. Lors d'un freinage, les roues arrière font tourner une machine électrique M_1 fonctionnant en génératrice. L'énergie électrique produite est utilisée pour alimenter un moteur électrique M_2 qui lance le volant d'inertie à une vitesse pouvant aller jusqu'à $60\,000 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$ au maximum.

L'action de M_2 est modélisée par un couple moteur de valeur absolue Γ constant. L'énergie cinétique du véhicule est ainsi stockée sous forme d'énergie cinétique de rotation (volant d'inertie en rotation autour de son axe).

Le volant d'inertie tourne en roue libre autour de son axe en attendant la phase de restitution demandée par le pilote.

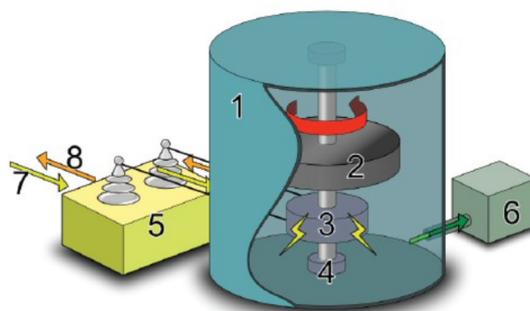
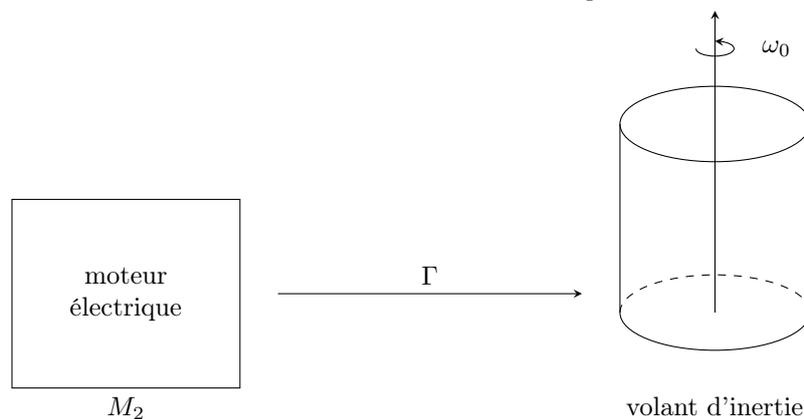


Figure 1 - Schéma de principe d'un volant associé à un système électrique pour stocker de l'énergie mécanique et rendre de l'énergie électrique. Dans cet exemple le volant d'inertie tourne dans une chambre sous vide pour limiter les frottements. 1 - chambre sous vide / 2 - volant d'inertie / 3 - moteur électrique / 4 - axe de rotation / 5 - convertisseur électrique / 6 - pompe à vide / 7 et 8 - lignes de tension (Source : wikipedia.org)

Le volant d'inertie sera assimilé à un cylindre homogène de masse m , de rayon R , de hauteur L , de masse volumique ρ en rotation par rapport à l'axe (Δ), axe de symétrie de révolution.

Q.1 Parmi les expressions ci-dessous, identifier la seule possibilité pour le moment d'inertie J_Δ et préciser pourquoi les autres propositions sont fausses.

$$J_\Delta = \frac{1}{2}mR \quad \Bigg| \quad J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2 \quad \Bigg| \quad J_\Delta = mRL \quad \Bigg| \quad J_\Delta = 2\frac{mL}{R}$$

Q.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ lors de la mise en rotation du cylindre sous l'action du seul couple moteur Γ en négligeant tout frottement.

Le cylindre qui a été mis en rotation par l'action du couple moteur Γ , tourne librement à vitesse de rotation ω_0 autour de son axe. On s'intéresse ensuite au freinage du cylindre sous l'action des forces de frottements modélisées par un couple résistif γ constant.

Q.3 Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ lors de la phase de freinage du cylindre sous l'action du seul couple résistif γ constant.

Q.4 À quel instant τ le cylindre s'arrête-t-il de tourner sachant que la vitesse de rotation initiale vaut ω_0 .

Q.5 Déterminer le nombre N de tours effectués par le cylindre avant l'arrêt en fonction de J_Δ , ω_0 et γ .

On souhaite que le volant d'inertie soit en rotation pendant $\tau = 10$ min.

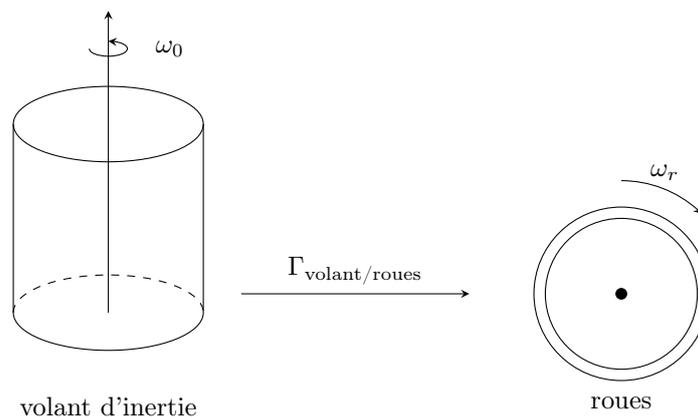
Ce dernier étant un cylindre d'environ 20 cm de rayon, et le couple résistif étant de l'ordre de $20 \text{ N} \cdot \text{m}$, évaluer la masse m du volant d'inertie qu'il faudrait mettre en plus en place dans une formule 1 en considérant que sa vitesse de rotation initiale vaut $60\,000 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$

Q.6 Montrer que cette masse est de l'ordre de la centaine de kg.

Q.7 Évaluer (en $\text{tour} \cdot \text{min}^{-1}$) la vitesse de rotation ω'_0 du volant d'inertie après $\Delta t = 8$ min.

Le volant d'inertie transfère ensuite son énergie cinétique de rotation aux roues.

On considère toujours le volant d'inertie de la partie précédente de masse $m = 100 \text{ kg}$ et l'ensemble des quatre roues est modélisé par quatre cylindres homogènes de rayon $R_r = 33 \text{ cm}$ et de masse $m_r = 12 \text{ kg}$ chacun en rotation à la vitesse angulaire ω_r .



Q.8 On considère que la formule 1 se déplace à une vitesse v de $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, en supposant que les roues roulent sans glissement, exprimer puis calculer la vitesse angulaire ω_r des roues.

Q.9 Les pertes seront prises en compte en considérant une vitesse initiale de rotation du volant d'inertie qui vaut seulement $\omega_0 = 5000 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$ au début de la restitution d'énergie.

L'ensemble {Formule 1 + pilote} possède une masse $M = 800 \text{ kg}$.

En considérant que l'énergie cinétique de rotation du volant d'inertie sert à augmenter la vitesse de rotation des quatre roues et à augmenter la vitesse de Formule 1 jusqu'à une nouvelle valeur v' , exprimer la variation du carré de la vitesse par $\Delta(v^2) = v'^2 - v^2$ en fonction de M , m , R , ω_0 et m_r la masse d'une roue.

Q.10 Effectuer l'application numérique. Quelle nouvelle vitesse v' peut-on alors espérer atteindre ? Commenter.

Exercice 3 : Le moteur Stirling

Au début du XIX^e siècle, les chaudières des machines à vapeur, soumises à de trop fortes pressions, explosent assez souvent. Robert Stirling a ainsi imaginé en 1816 un moteur dépourvu de chaudière où la chaleur est apportée de l'extérieur de la machine (moteur à « air chaud »). L'utilisation de ce moteur restera limitée, en particulier en raison de la trop faible puissance des modèles proposés, insuffisante pour concurrencer la machine à vapeur et le moteur à combustion interne.

Le moteur Stirling bénéficie actuellement d'un nouvel intérêt car il présente de nombreux avantages. Il peut utiliser n'importe quelle source d'énergie produisant de la chaleur, combustion de tout matériau mais également énergie solaire, nucléaire, géothermique, etc. Il produit peu de vibrations et est silencieux (pas d'explosion interne ni d'échappement gazeux, absence de valves et soupapes). Grâce à l'utilisation de matériaux modernes qui supportent de grands écarts de température et qui améliorent les transferts thermiques, son rendement est comparable, voire supérieur à celui des moteurs à combustion interne. Son entretien est facile et il s'use moins que les moteurs à explosion.

La conception d'un moteur Stirling est cependant délicate, en raison des gros écarts de température qu'il doit supporter et de la nécessité d'une excellente étanchéité ; son prix reste donc élevé. Par ailleurs, il est difficile de faire varier son régime. Son emploi reste ainsi cantonné à des utilisations de niches : générateur d'électricité en milieux extrêmes, propulseur pour sous-marins, etc. Sa réversibilité conduit à l'utiliser comme pompe à chaleur capable de refroidir à -200°C ou de chauffer à plus de 700°C .

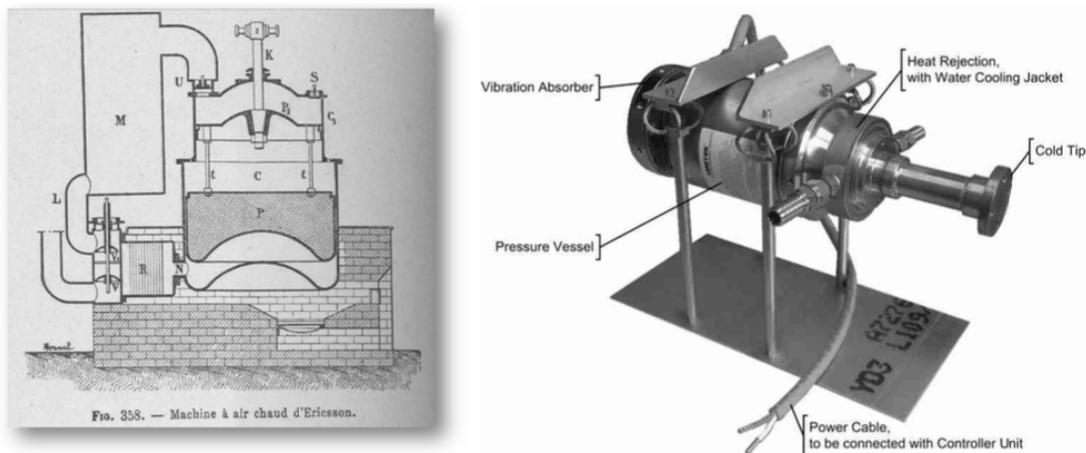


Figure 2 - Gravure de 1899 d'un Moteur Ericsson M1851 avec régénérateur type Stirling (Wikipédia) et moteur Stirling de l'entreprise Sunpower fournissant le projet KRUSTY (ResearchGate)

Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal V_1 , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal V_2 . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement le fluide passe de la chambre chaude à la température T_3 à la chambre froide à la température $T_1 < T_3$ et réciproquement.

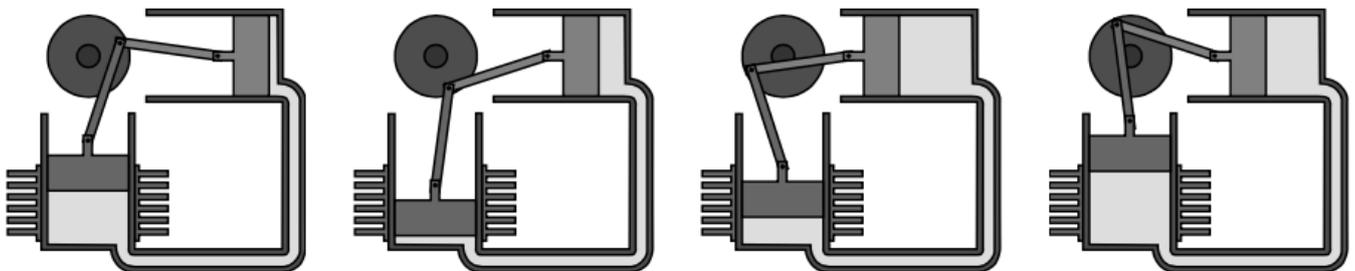


Figure 3 - Phases de fonctionnement d'un moteur de type alpha (d'après Wikipédia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 3) :

- une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;

- une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert thermique, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme (p, V) en figure 4 :

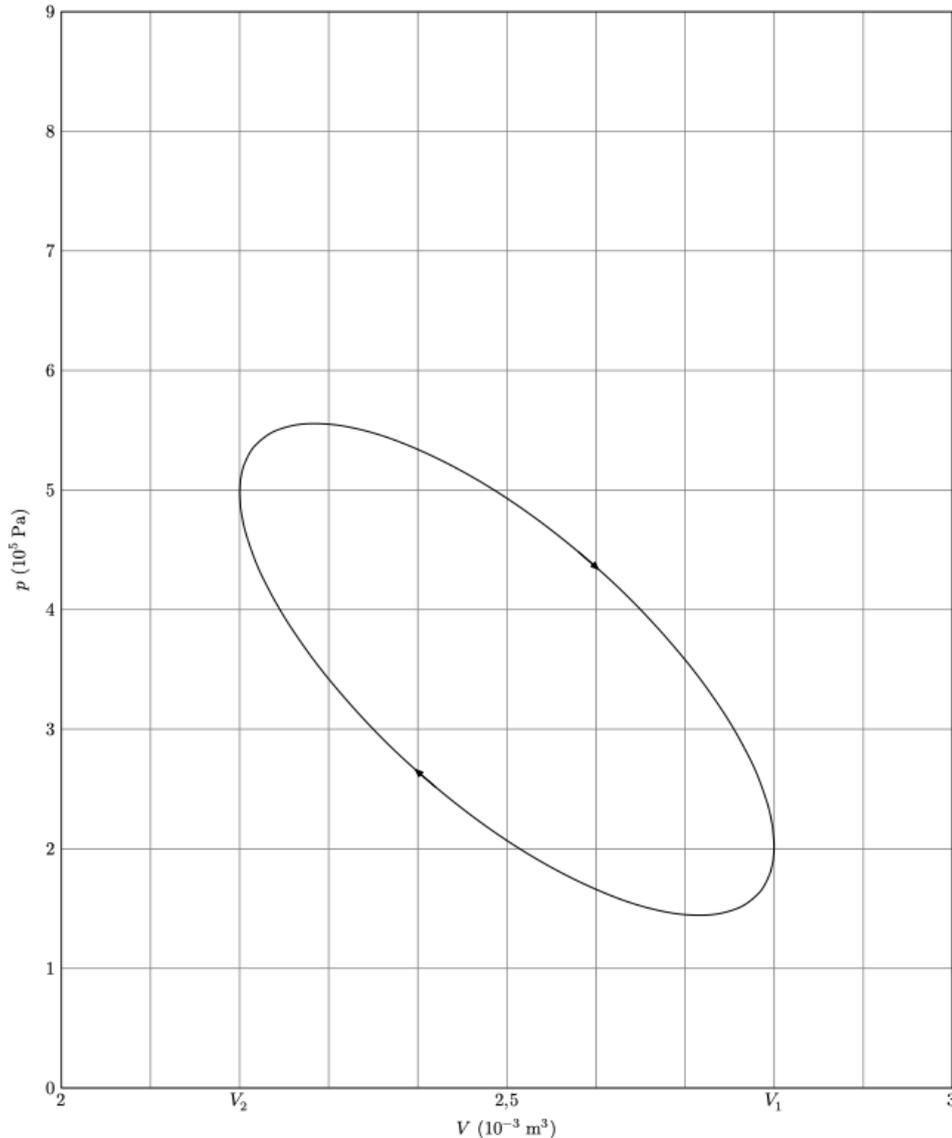


Figure 4 - Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme (p, V)

Q.1 Justifier que ce cycle est celui d'un moteur.

Q.2 Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci, n moles de gaz parfait de coefficient adiabatique γ subissent les transformations suivantes :

- une compression $(1 \rightarrow 2)$ isotherme réversible à la température T_1 ,
- un échauffement $(2 \rightarrow 3)$ isochore jusqu'à l'état 3 de température T_3 ,
- une détente $(3 \rightarrow 4)$ isotherme réversible à la température T_3 ,
- Un refroidissement $(4 \rightarrow 1)$ isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

Q.3 Représenter sur la copie l'allure du cycle modélisé ci-dessus dans un diagramme (p, V) .

On note $r = \frac{V_1}{V_2}$ le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant de n moles de gaz parfait vaut $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$ où $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits.

- Q.4** Exprimer W_{12} , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de n , R , T_1 et r . En déduire le transfert thermique Q_{12} reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de n , R , T_1 et r . Préciser les signes de W_{12} et Q_{12} .
- Q.5** Exprimer Q_{23} , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.
- Q.6** Exprimer W_{34} , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de n , R , T_3 et r . En déduire le transfert thermique Q_{34} reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de n , R , T_3 et r . Préciser les signes de W_{34} et Q_{34} .
- Q.7** Exprimer le transfert thermique Q_{41} reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de n , R , T_1 , T_3 et γ . Préciser son signe.

Rendement du moteur

- Q.8** Définir puis exprimer le rendement du moteur en fonction de T_1 , T_3 , r et γ .
- Q.9** Démontrer l'expression du rendement de Carnot en fonction de T_1 et T_3 . Puis proposer un cycle de Carnot moteur qui fonctionne entre les températures T_1 et T_3 .

En réalité, le moteur de Stirling utilisé dans le projet KRUSTY contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore ($4 \rightarrow 1$) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore ($2 \rightarrow 3$). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

Q.10 Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

Dans les conclusions du test de la NASA du dispositif KRUSTY réalisé en 2018, les ingénieurs indiquent que l'efficacité des moteurs a évolué pendant l'expérience entre 30% et 50% de l'efficacité de Carnot. De plus, pour les deux moteurs combinés, la puissance électrique obtenue est d'environ 180 W.

Q.11 En prenant une température chaude de 640°C et une température froide de 60°C et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

Exercice 4 : Trajectoires d'un satellite GPS

Dans tout le problème, le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen. Les données nécessaires sont regroupées en annexe à la fin de l'énoncé.

- Q.1** Rappeler l'expression de la force de gravitation \vec{F} exercée par la Terre sur un satellite NASTAR. Le centre de la Terre est situé en O . On notera r la distance OM du satellite (masse ponctuelle m) placé au point M , $r > R_T$ est le rayon terrestre. On exprimera \vec{F} en fonction de la constante de gravitation universelle G , des autres données et on utilisera le vecteur unitaire noté habituellement \vec{u}_r en coordonnées sphériques (figure 5).

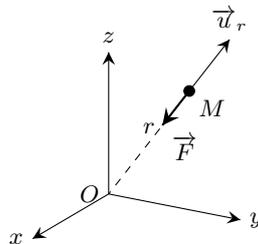


Figure 5 - Repère sphérique

- Q.2** En ne prenant en compte que cette unique force d'attraction qui s'exerce sur le satellite, montrer que le moment cinétique $\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}}$ est une constante du mouvement.
- Q.3** En déduire que sa trajectoire est plane.
- Q.4** Donner l'expression de la constante des aires \mathcal{C} .

Q.5 Montrer que son énergie mécanique notée E_m est une constante du mouvement.

Q.6 Montrer que l'énergie mécanique E_m peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$$

avec A et B deux constantes positives à définir, s'exprimant en fonction de m , M_T , G et de la constante des aires \mathcal{C} . L'énergie potentielle est prise nulle à l'infini.

Q.7 Soit la fonction $E_{\text{eff}}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$. Tracer son allure puis trouver qu'elle passe par un minimum noté r_0 . Exprimer r_0 en fonction de A et B puis donner sa signification physique.

On donne la définition d'un jour sidéral terrestre : c'est la durée que met la Terre pour faire un tour sur elle-même par rapport au point vernal (point considéré comme fixe dans le référentiel héliocentrique), indépendamment de sa révolution autour du Soleil. Elle vaut environ 23 h 56 min et 4 s.

Q.8 Démontrer l'expression de la vitesse du satellite sur son orbite circulaire de rayon r_0 .

Q.9 En déduire la 3^e loi de Kepler. Calculer la période de révolution du satellite avec une altitude de travail $h = 2,0 \times 10^4$ km. Comparer cette valeur à celle d'un jour sidéral et conclure.

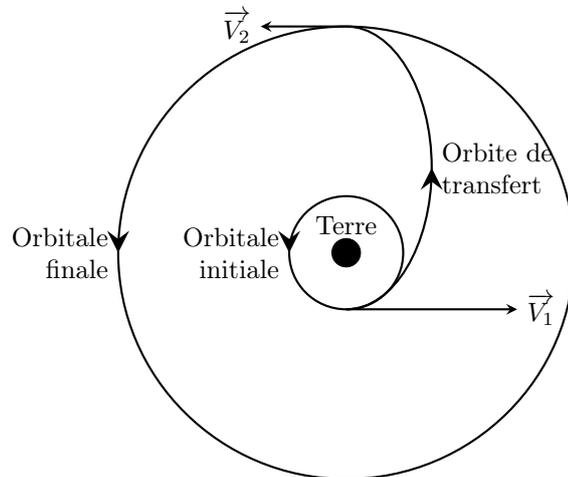


Figure 6 - Orbites circulaires et orbite de transfert

Le placement d'un satellite sur son orbite définitive s'effectue très schématiquement en trois phases (figure 6) :

- **Phase 1** : mise en orbite basse initiale supposée circulaire, de rayon $R_1 = R_T + h_1$, où $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km.
- **Phase 2** : on fournit une très brève impulsion au satellite (vitesse V_1 après l'impulsion) pour le placer sur une orbite elliptique dite de transfert (ou d'Hohmann) dont l'apogée se trouve sur l'orbite définitive.
- **Phase 3** : une seconde impulsion permet d'atteindre l'orbite finale supposée circulaire de rayon R_2 où la vitesse du satellite est V_2 .

Q.10 Retrouver l'expression de l'énergie mécanique E_{m1} d'un satellite NAVSTAR de masse $m = 800$ kg sur son orbite circulaire basse à l'altitude $h_1 = 1,50 \times 10^3$ km. On suppose l'énergie potentielle nulle à l'infini. Application numérique.

Q.11 Comparer E_{m1} à $E_{m0} = \alpha \cos^2(\lambda) - \beta$, énergie mécanique du satellite posé au sol, avant son décollage, de la base de lancement située à la latitude λ . Les valeurs de α et β sont $\alpha = 8,6 \times 10^7$ J et $\beta = 5,006 \times 10^{10}$ J. Quelle est la valeur optimale pour λ ? Faire l'application numérique pour cette valeur optimale. Conclure.

Q.12 À partir de l'expression de l'énergie mécanique pour une trajectoire circulaire de rayon r , on peut montrer qu'il suffit de substituer au rayon r la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse pour généraliser cette expression à une trajectoire elliptique. En déduire la valeur numérique de l'énergie mécanique E_{mt} sur l'orbite de transfert.

On suppose que la durée d'allumage des fusées est très courte (boost) devant la période de révolution et que le satellite n'a quasiment pas bougé durant cette phase.

Q.13 En déduire la variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à celle de transfert. Effectuer l'application numérique.

Q.14 Quelle est la durée du transfert ?

Pour réduire les coûts, on envisage d'autres trajectoires qui utilisent moins de satellites.

- Q.15** Définir ce qu'on appelle un satellite géostationnaire en précisant les caractéristiques de son orbite, son altitude, sa visibilité depuis un point donné de la Terre, son usage et toute autre donnée jugée d'intérêt. On pourra par exemple se poser la question si un tel satellite pourrait se trouver manière permanente à la verticale d'une ville française en justifiant la réponse.
- Q.16** Serait-il envisageable d'utiliser uniquement des satellites géostationnaires dans un système GPS ? Expliciter votre réponse.

Données :

Constante de la gravitation universelle	$G = 6,674\,30 \times 10^{-11}$ SI
Masse de la Terre	$M_T = 5,9722 \times 10^{24}$ kg
Rayon terrestre	$R_T = 6,371 \times 10^3$ km

... **FIN** ...