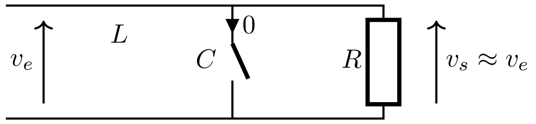
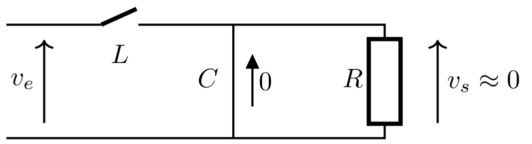
CB2 du 2/6 : Physique (4h)

Solution de l'exercice 1 : Modulation et démodulation

Q.1 On trace le circuit équivalent en BF :



Q.2 On trace le circuit équivalent en HF :



Q.3 Il s'agit donc d'un filtre passe bas.

Q.4 On calcule l'impédance équivalente :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = jC\omega + \frac{1}{R}$$

On applique le pont diviseur de tension :

$$\underline{v}_s = \underline{v}_e \times \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + jL\omega} = \underline{v}_e \times \frac{1}{1 + jL\omega \times \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}}}$$

On définit la fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}$$

On obtient bien la forme proposée dans l'énoncé avec $\boxed{H_0 = 1}$, $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{\lambda = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

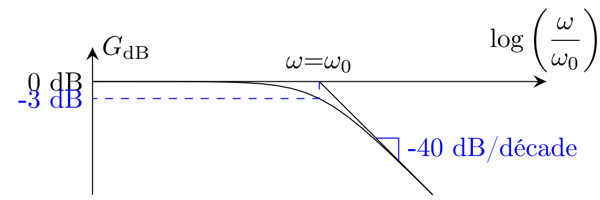
Q.5 Soit $V_{sm} = |\underline{v}_s|$ et $V_{em} = |\underline{v}_e|$ donc $\boxed{V_{sm} = |\underline{H}| V_{em}}$.

Q.6 Soit $\varphi_s = \arg(\underline{v}_s)$, $\varphi_e = \arg(\underline{v}_e)$ et $\varphi = \arg(\underline{H})$ donc $\boxed{\varphi_s = \varphi + \varphi_e}$.

Q.7 Soit $|\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\lambda^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ avec $4\lambda^2 = 2$ on obtient : $|\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}$

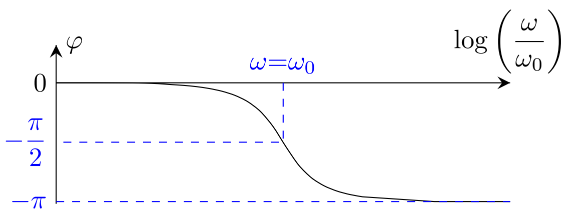
Q.8 On définit $G_{\text{dB}} = 20\log(|\underline{H}|)$ avec :

- en BF : $|\underline{H}| \approx 1$ soit $G_{\text{dB}} \approx 0$;
- en HF : $|\underline{H}| \approx \left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ soit $G_{\text{dB}} \approx -40\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$;
- La pulsation de coupure est définit par : $|\underline{H}|(\omega_c) = \dfrac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$ ce qui donne $\omega_c = \omega_0$ et $G_{\text{dB}}(\omega_0) = -3\text{dB}$.



Q.9 On définit $\varphi = \arg(\underline{H})$ avec :

- en BF : $\underline{H} \approx 1$ soit $\varphi \approx 0$;
- en HF : $\underline{H} \approx -\dfrac{\omega_0}{\omega}$ soit $\varphi \approx -\pi$;
- pour $\omega = \omega_0$: $\underline{H}(\omega_0) = -j\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ce qui donne $\varphi = -\pi/2$.



Solution de l'exercice 2 : Mécanique du solide et formule 1 !!

Q.1 Pour une distribution discrète de masse :

$$J_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

s'exprimant en $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ tel que $[J_\Delta] = ML^2$.

Les expressions $J_\Delta = \frac{1}{2}mR$ et $J_\Delta = 2m\frac{L}{R}$ ne sont pas homogènes à un moment d'inertie.

L'expression $J_\Delta = mRL$ ne convient pas car seule la distance à l'axe de rotation Δ intervient dans J_Δ (donc pas de dépendance en L).

Seule $\boxed{J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2}$ correspond au moment d'inertie du cylindre de rayon R et de masse m.

Q.2 **Système :** {solide (S)}

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

BAME : Couple moteur Γ constant.

TMC scalaire : $\left.\dfrac{\mathrm{d}L_\Delta(S)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = J_\Delta\ddot{\theta} = \Gamma$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = \frac{\Gamma}{J_\Delta} = C^{te} > 0}$$

Q.3 **BAME :** Couple résistif γ constant.

TMC scalaire : $J_\Delta\ddot{\theta} = -\gamma$

$$\boxed{\ddot{\theta}(t) = -\frac{\gamma}{J_\Delta}}$$

Q.4 Par intégration de $\ddot{\theta}(t) = -\frac{\gamma}{J_\Delta}$ on obtient la vitesse angulaire :

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \frac{\gamma}{J_\Delta}t}$$

avec $\omega(0) = \omega_0$. On cherche l'instant τ tel que $\omega(t = \tau) = 0$ soit $\boxed{\tau = \frac{\omega_0 J_\Delta}{\gamma}}$.

Q.5 On cherche le nombre N de tours effectués avant l'arrêt du cylindre tel que $\theta(t = \tau) = N \times 2\pi$ avec

$$\theta(t) = -\frac{\gamma}{2J_\Delta}t^2 + \omega_0 t + \cancel{\theta_0}$$

Soit $2\pi N = -\frac{\cancel{\gamma}}{2\cancel{J_\Delta}} \times \frac{\omega_0^2 J_\Delta^{\cancel{2}}}{\gamma^{\cancel{2}}} + \omega_0^2 \frac{J_\Delta}{\gamma}$

$$\boxed{N = \frac{\omega_0^2 J_\Delta}{4\pi\gamma}}$$

Q.6 **Données :** $\tau = 10\,\mathrm{min} = 600\,\mathrm{s}$

$R = 20 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$ $\quad |\gamma| = 20\,\mathrm{N \cdot m}$

$\omega_0 = 60\,000\,\mathrm{tour \cdot min^{-1}} \approx 6283\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

avec $J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$ soit $m = \frac{2J_\Delta}{R^2}$

de plus : $J_\Delta = \frac{\gamma\tau}{\omega_0}$ $\boxed{m = \frac{2\gamma\tau}{\omega_0 R^2}}$

AN : $m \approx 95\,\mathrm{kg}$ proche des $100\,\mathrm{kg}$ proposés.

Q.7 On cherche $\omega_0' = \omega(t = \Delta t = 8\,\mathrm{min})$

$$= -\frac{\gamma}{J_\Delta}\Delta t + \omega_0 = -\frac{\cancel{\gamma}\omega_0}{\cancel{\gamma}\tau}\Delta t + \omega_0$$

$$\boxed{\omega_0' = \omega_0\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)}$$

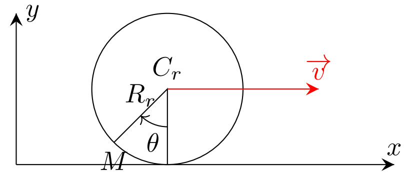
AN : $12\,000\,\mathrm{tour \cdot min^{-1}}$

Q.8 La distance élémentaire $\mathrm{d}x$ parcourue par le centre de masse C_r de la roue est proportionnelle à l'angle élémentaire $\mathrm{d}\theta$ tant que la roue roule sans glisser :

$$\mathrm{d}x = R_r \mathrm{d}\theta$$

d'où $\dot{x} = R_r\dot{\theta}$ soit $v = R_r\omega_r$ $\boxed{\omega_r = \frac{v}{R_r}}$

AN : $\omega_r = 1{,}7 \times 10^2\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 1{,}6 \times 10^3\,\mathrm{tour \cdot min^{-1}}$.



Q.9 Il faut effectuer un Bilan d'énergie cinétique en lisant attentivement l'énoncé :

$$\Delta E_c(S) = \Delta E_c(4\text{ roues}) + \Delta E_c(\text{Formule 1 + pilote})$$

avec $\Delta E_c(S) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2$ l'énergie cinétique du volant d'inertie.

$E_{cf}(4\text{ roues}) = 4 \times \frac{1}{2}J_r\omega_r^2 = 4 \times \frac{1}{2}\frac{1}{2}m_r R_r^2 \frac{v'^2}{R_r^2}$

$E_{cf}(\text{Formule 1 + pilote}) = \frac{1}{2}Mv'^2$

$E_{ci}(4\text{ roues}) + E_{ci}(\text{Formule 1 + pilote}) = m_r v^2 + \frac{1}{2}Mv^2$ d'où : $\frac{1}{2}J_\Delta\omega_0^2 = \left(m_r + \frac{M}{2}\right)(v'^2 - v^2)$

$$\boxed{\Delta v^2 = \frac{J_\Delta\omega_0^2}{2m_r + M}}$$

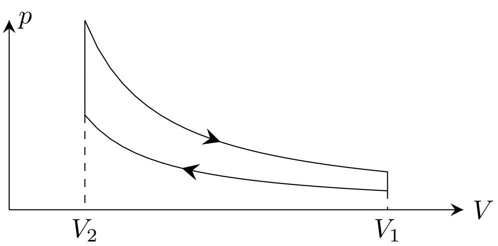
Q.10 AN : $\Delta v^2 \approx 639\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$ soit $v' \approx 61\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \approx 220\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.
Augmentation de 10% de la vitesse.

Solution de l'exercice 3 : Le moteur Stirling

Q.1 Sens horaire donc le cycle est moteur car $W < 0$.

Q.2 On considère que $W = -A_{\text{cycle}}$ l'air du cycle. On décompte entre 12 et 14 carreaux contenus dans le cycle soit $\boxed{W = -130 \pm 10\,\mathrm{J}}$.

Q.3 Cycle dans le diagramme (p, V) :



Q.4 **Transformation** $1 \to 2$ **:** $W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}}\mathrm{d}V$

isotherme réversible d'un GP : $P_{\text{ext}} = P = \frac{nRT_1}{V}$

$$\boxed{W_{12} = nRT_1\ln(r)} > 0$$

1^er^ principe : $\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12}$

1^re^ loi de Joule : $\Delta U_{12} = C_V(T_1 - T_1) = 0$.

$$\boxed{Q_{12} = -nRT_1\ln(r)} < 0$$

Q.5 **Transformation** $2 \to 3$ **:** isochore$\Longrightarrow W_{23} = 0$

1^er^ principe : $\Delta U_{23} = Q_{23} + \cancel{W_{23}}$

1^re^ loi de Joule : $\Delta U_{23} = C_V(T_3 - T_1)$

$$\boxed{Q_{23} = \frac{nR(T_3 - T_1)}{\gamma - 1}} > 0$$

Q.6 **Transformation** $3 \rightarrow 4$ **:** isotherme réversible

$$\boxed{W_{34} = -nRT_3 \ln(r)} < 0$$

$$\boxed{Q_{34} = nRT_3 \ln(r)} > 0$$

Q.7 **Transformation** $4 \rightarrow 1$ **:** isochore

$$\boxed{Q_{41} = \frac{nR(T_1 - T_3)}{\gamma - 1}} < 0$$

Q.8 Soit $\eta = \dfrac{-W}{Q_c}$ avec $Q_c = Q_{23} + Q_{34}$

et $W = W_{12} + W_{34}$ $\quad \boxed{\eta = \dfrac{\ln(r)(T_3 - T_1)}{\frac{T_3 - T_1}{\gamma - 1} + T_3 \ln(r)}}$

Q.9 Lors d'un cycle :

1$^{\text{er}}$ principe : $\Delta U_{\text{cycle}} = W + Q_c + Q_f = 0$

$$-W = Q_c + Q_f \qquad \eta = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

2$^{\text{e}}$ principe : $\Delta S_{\text{cycle}} = S_{\text{ech}} + S_{\text{cr}} = 0$

$S_{\text{cr}} = 0$ car le cycle de Carnot est réversible.

$$S_{\text{ech}} = \frac{Q_f}{T_1} + \frac{Q_c}{T_3} = 0 \Longrightarrow Q_f = -Q_c \frac{T_1}{T_3}$$

$$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3}}$$

Q.10 Lors de la récupération on économise et donc $Q_c = Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$, si la récupération est totale alors $Q_{23} + Q_{41} = 0$ soit :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_c$$

Q.11 Soit $P_e = 180\,\text{W}$, on suppose que $P_e = P_m$ et avec Δt la durée d'un cycle on a $P_m = \dfrac{-W}{\Delta t}$ et $P_c = \dfrac{Q_c}{\Delta t}$: $\eta = \dfrac{P_m}{P_c} = 0,5\eta_c$

$$P_c = \frac{P_m}{0,5(1 - \frac{T_1}{T_3})} \qquad \underline{\text{AN : } P_c \approx 570\,\text{W}}$$

Solution de l'exercice 4 : Trajectoires d'un satellite GPS

Q.1 La force de gravitation $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite NAVSTAR est une force centrale conservative Newtonienne attractive de la forme :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{u}_r = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}_r}$$

Q.2 Par application du théorème du moment cinétique dans $\mathscr{R}$ galiléen :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathscr{R}} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\vec{F})$$

$$= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\vec{u}_r \wedge -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}_r = \vec{0}$$

d'où $\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = \overrightarrow{C^{te}}}$

Q.3 Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et perpendiculaire à la direction constante de $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}}$. Par définition, $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}}$ est un vecteur $\perp$ au plan contenant $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}$. Le mouvement est donc plan, contenu dans le plan $\mathscr{P}$.

Q.4 Dans la base polaire, on exprime le moment cinétique du satellite :

$$\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}} = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathscr{R}}$$

$$= r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$= mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

Par conservation de la norme du vecteur $\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}}$, on en déduit la constante des aires :

$$\boxed{\mathscr{C} = \frac{\|\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathscr{R}}\|}{m} = r^2(t)\dot{\theta}(t) = C^{te}}$$

Q.5 Par application du théorème de l'énergie mécanique dans $\mathscr{R}$ galiléen :

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_{nc}) = 0$$

car $\vec{F}$ est conservative, d'où la conservation de l'énergie mécanique $\boxed{E_m = C^{te}(\text{CI})}$

Q.6 Avec $E_c(M) = \dfrac{1}{2}mv^2(M) = \dfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$

et $E_p(r) = -\dfrac{GmM_T}{r}$

on réécrit l'énergie mécanique du satellite :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM_T}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{m\mathscr{C}^2}{2r^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

On identifie alors $\boxed{A = GmM_T} > 0$ et $\boxed{B = \dfrac{m\mathscr{C}^2}{2}} > 0.$

Q.7 On rappelle la définition de l'énergie potentielle effective : $E_{\text{peff}}(r) = -\dfrac{A}{r} + \dfrac{B}{r^2}$ telle que :

$$E_{\text{peff}} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

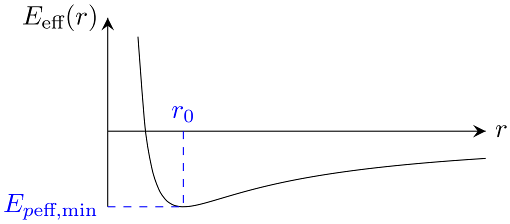
$$E_{\text{peff}} \underset{r\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Recherche du minimum (position équilibre stable ici) :

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{peff}}}{\mathrm{d}r} = B\left(\frac{-2}{r^3}\right) - A\left(\frac{-1}{r^2}\right)$$

on recherche r_0 solution de $\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{peff}}}{\mathrm{d}r}(r=r_0)=0$:

$$\frac{-2B}{r_0^3}+\frac{A}{r_0^2}=0 \Longrightarrow \boxed{r_0=\frac{2B}{A}=\frac{\mathscr{C}^2}{GM_T}}>0$$



Il s'agit du rayon r_0 de l'orbite circulaire du satellite (état lié, trajectoire bornée) où l'énergie cinétique radiale est nulle.

Q.8 **Système :** $\{M(m)\}$ satellite NAVSTAR supposé ponctuel en orbite circulaire de rayon r_0.

Référentiel : Géocentrique supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques : $\overrightarrow{F}=-\dfrac{GmM_T}{r_0^2}\overrightarrow{u}_r$

Principe fondamental de la dynamique : $m\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}=\overrightarrow{F}$

avec ici $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathscr{R}}=r_0\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$

et $\overrightarrow{a}(M)_{/\mathscr{R}}=r_0\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta-r_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r$

d'où $/\overrightarrow{u}_r$: $-mr_0\dot{\theta}^2=-\dfrac{GmM_T}{r_0^2}$

et $/\overrightarrow{u}_\theta$: $r_0\ddot{\theta}=0\Longrightarrow r_0\dot{\theta}=C^{te}=v_0$ mouvement circulaire uniforme.

$$\boxed{v_0=\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$$

Q.9 La période de révolution s'exprime selon :

$$T=\frac{2\pi r_0}{v_0}=2\pi r_0\sqrt{\frac{r_0}{GM_T}}$$

On retrouve alors la loi des périodes de Képler (1618) : $\boxed{\dfrac{T^2}{r_0^3}=\dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$

<u>AN : $T\approx 42\,640\,\mathrm{s}\approx 11{,}8\,\mathrm{h}$</u>

avec $r_0=R_T+h\approx 26\,371\,\mathrm{km}$ soit quasiment un demi jour sidéral.

Q.10 Avec $E_c=\dfrac{1}{2}mv_1^2=\dfrac{mGM_T}{2R_1}$ où $R_1=R_T+h_1$ et $E_p=-\dfrac{GmM_T}{R_1}$ on obtient :

$$E_{m1}=\frac{mGM_T}{2R_1}-\frac{GmM_T}{R_1}$$

$$\boxed{E_{m1}=-\frac{GmM_T}{2R_1}}<0$$

<u>AN : $E_{m1}\approx -2{,}0\times 10^{10}\,\mathrm{J}$</u> avec $R_1\approx 7871\,\mathrm{km}$

Q.11 On donne l'énergie mécanique du satellite posé au sol : $E_{m0}=\alpha\cos^2(\lambda)-\beta$ à la latitude λ.

La latitude optimale est celle qui va maximiser l'énergie mécanique au sol afin de réduire les coûts de lancement (énergie fournie à la fusée). On en déduit alors $\boxed{\lambda=0}$ (à l'équateur) tel que $E_{m0}=\alpha-\beta$.

<u>AN : $E_{m0}\approx -5{,}0\times 10^{10}\,\mathrm{J}$</u>

Q.12 Soit $E_{mt}=\dfrac{-GM_Tm}{2a}$ avec $2a=R_1+R_2$.

<u>AN : $E_{mt}\approx -9{,}3\times 10^{9}\,\mathrm{J}<0$</u> avec $R_2=r_0\approx 26\,371\,\mathrm{km}$

Q.13 La variation de vitesse ΔV_1 à appliquer au satellite pour qu'il passe de l'orbite basse à l'orbite de transfert vérifie :

$$\Delta E_m=\Delta E_c+\cancel{\Delta E_p}$$

en considérant que l'altitude reste quasi constante durant cette phase de Boost.

$$E_{mt}-E_{m1}=\frac{1}{2}m(V_1+\Delta V_1)^2-\frac{1}{2}mV_1^2$$

où $V_1=\sqrt{\dfrac{GM_T}{R_1}}\approx 7{,}1\times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

soit $\boxed{\Delta V_1=\sqrt{\dfrac{2\Delta E_m}{m}+V_1^2}-V_1}$

<u>AN : $\Delta V_1\approx 1{,}68\times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$</u>

Q.14 Le satellite ne parcourt qu'une demi ellipse pendant le transfert de durée

$$\tau=\frac{T}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{GM_T}}$$

$$\boxed{\tau=\pi\sqrt{\frac{1}{GM_T}\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3}}$$

<u>AN : $\tau\approx 11\,128\,\mathrm{s}\approx 3\,\mathrm{h}$</u>

Q.15 Il s'agit d'un satellite qui reste constamment au dessus du même point de la surface de la Terre. Il apparaît immobile pour un observateur Terrestre.

La période de révolution d'un tel satellite vaut $T_{\text{géo}}=T_{\text{sid}}=$23 h 56 min et 4 s

Le rayon de l'orbite géostationnaire vérifie la 3e loi de Kepler :

$$\frac{T_{\text{géo}}^2}{r_{\text{géo}}^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}\Longrightarrow r_{\text{géo}}=\left(\frac{GM_TT_{\text{géo}}^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

<u>AN : $r_{\text{géo}}\approx 42\,000\,\mathrm{km}$</u> soit $h_{\text{géo}}\approx 36\,000\,\mathrm{km}$.

Tous les satellites géostationnaires ont une orbite qui coïncide avec le plan équatorial Terrestre.

Il est impossible d'avoir un satellite géostationnaire à la verticale d'une ville Française.

Q.16 Si tous les satellites GPS sont situés dans le même plan, ils ne peuvent pas distingué si le signal reçu provient du pôle nord ou du pôle sud.