Chapitre 1 — Complément

Epilogue : à propos des Mathématiques intuitionnistes

Le texte reproduit ci-dessous (à titre culturel) est celui d'un article dû à Éric MORVAN, enseignant au Lycée Bertran-de-Born (Périgueux), et publié dans le Bulletin de l'UPS numéro 258 (2017).

Se moquer du tiers comme du milieu

Mathématiques constructives

Les mathématiciens font un grand usage du principe du tiers exclu, à savoir que toute proposition P est vraie ou fausse. Mais certains mathématiciens dits *intuitionnistes*, à la suite de Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1907, critiquent l'utilisation de ce principe, considérant qu'une proposition P ne peut être déclarée vraie que lorsqu'on en a construit une preuve directe. Par ń preuve directeż ils entendent un raisonnement constitué d'une succession de pas déductifs permettant de passer d'une proposition P_0 dont on sait qu'elle est vraie à la proposition P.

Les mathématiques intuitionnistes sont dites aussi mathématiques constructives car, dans ce cadre, la preuve de l'existence d'un objet mathématique passe par la possibilité de le construire, par exemple en fournissant un algorithme à cet effet.

> *"Constructive mathematics is distinguished from its traditional counterpart, classi- cal mathematics, by the strict interpretation of the phrase "there exists" as "we can construct"."*

Pour Brouwer, le principe du tiers exclu a le défaut de permettre d'affirmer que toute proposition P est vraie ou fausse, même si l'on ne connaît aucune démonstration de sa véracité ou de sa fausseté. On attribue à Brouwer l'adage : "there are no non-experienced truths". Sa position était en effet de refuser la possibilité qu'un théorème soit démontré par application de règles de logique sans qu'il soit nécessaire de prendre en compte son contenu sémantique.

L'opposition à l'intuitionnisme fut farouche, à commencer par celle de Hilbert : "[Accepter le programme de Brouwer] revient à démembrer et mutiler notre science ; si nous suivions de tels réformateurs, nous courrions le danger de perdre un grand nombre de nos trésors les plus précieux" (1922). Ou encore :

> *"Enlever le principe du tiers exclu aux mathématiciens serait la même chose, disons, que d'interdire le télescope aux astronomes ou aux boxeurs l'usage des poings." (1928)*

Une proposition peut être vraie, fausse ou indécidable

On dit que Brouwer a introduit le temps en mathématiques. Au lieu de considérer qu'une proposition est vraie ou fausse de toute éternité, un mathématicien intuitionniste considère qu'elle est (peut-être temporairement) indécidable tant qu'elle n'a pas été prouvée (de manière constructive) vraie ou fausse.

Toutefois, s'ils rejettent le principe du tiers exclu, les mathématiciens intuitionnistes conservent le principe de non-contradiction : P ne peut pas être simultanément vraie ou fausse. De ce fait, il y a en logique intuitionniste trois cas possibles qui s'excluent mutuellement.

(i) On peut construire une preuve de P ; on dira alors que P est vraie.

(ii) À partir de l'hypothèse P, on peut construire une contradiction de P ; on dira que P est fausse.

(iii) On ne peut ni prouver que P est vraie, ni prouver que P est fausse ; on dira que P est indécidable.

Ayant abandonné le principe du tiers exclu les mathématiciens intuitionnistes ont en échange besoin de quelques postulats consistant à déclarer que certaines propositions sont toujours décidables. Il en est ainsi de l'égalité dans $\mathbb{N}$; pour a et b entiers naturels, il n'y a que deux cas : $a = b$ ou $a \neq b$. De même le principe de récurrence est conservé.

➤ Un exemple classique : nous voulons démontrer qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel. La preuve en logique classique repose sur le statut de vérité de la proposition P : "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel".

1er cas : on suppose que P est vraie, c'est-à-dire que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel. Alors on peut choisir $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.

2nd cas : on suppose que P est fausse, c'est-à-dire que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel. Alors :

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2 \text{ est rationnel.}$$

On peut donc choisir $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$.

Il est difficile de ne pas être frustré par une telle démonstration, qui prouve l'existence d'un couple (a, b) de nombres irrationnels tels que a^b soit irrationnel, mais ne permet pas de décider si le bon choix est $(a, b) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ou $(a, b) = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$.

Cette démonstration est évidemment non constructive et n'est pas concluante dans le cadre de la logique intuitionniste puisqu'elle ne prend pas en compte le 3e cas : P peut être indécidable. [1]

Renoncer au raisonnement par l'absurde

Soit un ensemble E dans lequel, pour tout élément x, on considère une propriété $\mathscr{P}(x)$. Pour démontrer qu'il existe au moins un élément x_0 de E tel que $\mathscr{P}(x_0)$ soit vraie on peut supposer que, pour tout x de E, $\mathscr{P}(x)$ est fausse. Si ceci entraîne une contradiction, on en déduira en vertu du principe du tiers exclu qu'il existe au moins un élément x_0 de E tel que $\mathscr{P}(x_0)$ soit vraie.

Un tel raisonnement par l'absurde est inadmissible pour un mathématicien constructiviste puisqu'il ne fournit aucune méthode pour calculer x_o. Effectivement, en logique intuitionniste, le raisonnement par l'absurde est impossible, puisque celui-ci consiste à supposer qu'une proposition P est fausse et à faire apparaître une contradiction. En logique classique, on en déduit que P n'est pas fausse et donc qu'elle est vraie. En logique intuitionniste, on en déduit seulement que le cas (ii) est impossible et donc que P est vraie (cas (i)) ou indécidable (cas (iii)).

1. On sait grâce à une démonstration due à Kuzmin que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

Il convient toutefois de distinguer le raisonnement par l'absurde, où on suppose P fausse, du raisonnement où on suppose P vraie et où on fait apparaître une contradiction (par une preuve directe). Un tel raisonnement est parfaitement accepté en mathématiques constructives puisqu'il consiste simplement à établir le cas (ii) : P est fausse.

Exemple : pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, on suppose que la proposition P : "$\sqrt{2}$ est un nombre rationnel" est vraie. On sait qu'il existe une écriture $\sqrt{2 = p/q}$, où p et q sont deux entiers premiers entre eux. Or on peut prouver que p et q sont tous les deux pairs (voir propriété **??**, page **??**) ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux.

On en déduit que P est fausse : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

La négation d'une proposition

En logique classique, la proposition non-P est définie comme la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse. En logique intuitionniste, on convient de dire que non-P est vraie lorsque P est fausse. Pour simplifier les énoncés qui suivent, on abrègera les notations en remplaçant P vraie et P fausse par P et non-P.

En logique classique, non-(non-P) $\equiv$ P, d'où la possibilité de raisonner par l'absurde.

En logique intuitionniste, P (cas (i)) et non-P (cas (ii)) sont incompatibles. Donc, si P, supposer non-P entraîne une contradiction :

P $\Longrightarrow$ non-(non-P)

Mais l'implication réciproque est fausse en général puisque non-(non-P) signifie seulement qu'il est contradictoire d'affirmer que P est fausse. Restent alors deux possibilités : P est vraie ou indécidable.

Exemple : considérons une proposition P du type "l'ensemble X est non vide". Pour prouver non-(non-P), il suffit de démontrer que l'hypothèse non-P (càd que X est vide) conduit à une contradiction. En revanche, en mathématiques constructives, pour prouver P, il faut une démonstration permettant d'exhiber un élément de X.

De ce fait les mathématiciens intuitionnistes distinguent les ensembles habités (P est vraie) et les ensembles non vides (non-(non-P) est vraie). Tout ensemble habité est non vide, mais un ensemble non vide n'est pas forcément habité...

Les lois de Morgan

En logique classique, la première loi de Morgan est : (non-P ou non-Q) $\equiv$ non-(P et Q).

En logique intuitionniste, l'implication suivante reste vraie :

$$\text{(non-P ou non-Q)} \Longrightarrow \text{non-(P et Q)}.$$

En effet, si P est fausse ou Q est fausse, supposer (P et Q), c'est-à-dire P et Q vraies, contredit l'une au moins des deux hypothèses initiales. Donc (P et Q) est fausse.

Réciproquement, si l'on suppose (P et Q) fausse, il est possible par exemple que P soit vraie et Q indécidable et, dans ce cas, ni P, ni Q, ne sont fausses, donc non-(P et Q) n'entraîne pas (non-P ou non-Q).

On peut le comprendre ainsi : pour affirmer que (P et Q) est fausse, on a construit une preuve directe amenant à une contradiction à partir de l'hypothèse (P et Q). Mais pour prouver P fausse ou Q fausse, il faut être capable du même travail à partir d'une seule des deux hypothèses P ou Q, qui sont plus faibles.

Exemple : soit x un nombre réel. Considérons les propositions P : “x est un nombre rationnel” et Q : “x est un nombre irrationnel”.
La proposition (P et Q) est fausse en vertu du principe de non-contradiction. Mais prouver P fausse ou Q fausse est plus exigeant : il faut déduire une contradiction de l'hypothèse x rationnel ou de l'hypothèse x irrationnel.

En revanche, la logique intuitionniste dispose toujours de la seconde loi de Morgan :

$$\text{(non-P et non-Q)} \Longrightarrow \text{non-(P ou Q)}.$$

Retour sur le principe du tiers exclu

Malgré le rejet du principe du tiers exclu, “aucun constructiviste raisonnable ne peut prétendre qu'une instance du principe du tiers exclu est fausse”.
Soit en effet une proposition P quelconque ; la propriété du tiers exclu appliquée à P est (P ou non-P). Supposons non-(P ou non-P). D'après la seconde loi de Morgan, ceci équivaut à (non-P et non-(non-P)).

Ces deux affirmations étant incompatibles, on a bien non-(non-(P ou non-P)) : l'affirmation que (P ou non-P) est fausse est contradictoire.
Conclusion : la propriété du tiers exclu appliquée à une proposition P est vraie ou indécidable.