Corrigé de l'exo 16 (Logique et ensembles)

Exercice 16. — Soient A et B deux parties d'un même ensemble E.

1/ Prouver que : $[A \subset B] \Longleftrightarrow [A \cup B = B]$.

2/ Prouver que : $[A = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A \cup B]$.

➤ **Question 1**. Traitée comme exemple dans le cours.

➤ **Question 2**. Prouvons l'équivalence $[A = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A \cup B]$ par double implication.

➞ *Sens direct* ($\Longrightarrow$). Supposons $A = B$. On a alors naturellement $A \cap B = A \cup B$.[*]

Ainsi : $\boxed{[A = B] \Longrightarrow [A \cap B = A \cup B] \quad (\spadesuit)}$

➞ *Réciproque* ($\Longleftarrow$). Supposons $A \cap B = A \cup B$.

Montrons que $A = B$ par double inclusion.

Soit $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$. Puisque par hypothèse on a $A \cap B = A \cup B$, on en déduit que $x \in A \cap B$. En particulier : $x \in B$.

On a prouvé l'implication : $[x \in A] \Longrightarrow [x \in B]$. Ce qui signifie que : $\boxed{A \subset B}$.

L'inclusion $\boxed{B \subset A}$ se démontre de manière analogue.[†]

Par double inclusion, on a donc : $A = B$.

On a ainsi établi que : $\boxed{[A \cap B = A \cup B] \Longrightarrow [A = B] \quad (\clubsuit)}$

➞ *Conclusion*. On déduit de $(\spadesuit)$ et $(\clubsuit)$ que : $\boxed{[A = B] \Longleftrightarrow [A \cap B = A \cup B]}$.

∗. Puisque sous notre hypothèse, $A \cap B$ et $A \cup B$ sont tous les deux égaux à A (ou tous les deux égaux à B).

†. Il suffit de reprendre le raisonnement précédent, et de permuter les rôles de A et de B, ou d'observer que les ensembles A et B jouent des rôles symétriques dans cet énoncé.