Colle 1 — Questions de cours

Question de cours 1 — Décomposition paire + impaire (existence) : toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$

Preuve. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

➤ Analyse : supposons qu'il existe deux fonctions g et h, définies sur $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$. Il revient au même d'écrire : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = g(x) + h(x)$.

On a également : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(-x) + h(-x)$.

D'où (g étant paire et h impaire) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = g(x) - h(x)$.

On a ainsi obtenu le système : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$, dont la résolution aisée* donne :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

➤ Synthèse : en vertu de ce qui précède, on définit donc g et h sur $\mathbb{R}$ en posant judicieusement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Il est alors clair que $\boxed{f = g + h}$.

En outre : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x)$ d'où $\boxed{g \text{ est paire}}$.

Et : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$ d'où $\boxed{h \text{ est impaire}}$.

Conclusion. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$, il existe un couple (g, h) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire, telles que : $f = g + h$

Question de cours 2 — Exo sur la récurrence double, extrait du DS1 : soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + 4^n$

Preuve. Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 3^n + 4^n$.

➤ Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). On a : $u_0 = 2$ (énoncé) et $3^0 + 4^0 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 7$ (énoncé) et d'autre part $3^1 + 4^1 = 7$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \qquad \text{(selon l'énoncé)}$$

$$\iff u_{n+2} = 7\left(3^{n+1} + 4^{n+1}\right) - 12\left(3^n + 4^n\right) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$\iff u_{n+2} = 21 \times 3^n + 28 \times 4^n - 12 \times 3^n - 12 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 9 \times 3^n + 16 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3^2 \times 3^n + 4^2 \times 4^n$$

$$\iff u_{n+2} = 3^{n+2} + 4^{n+2}$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + 4^n$

---

*. Il suffit de faire l'addition et la soustraction des deux lignes du système.

Question de cours 3 — Propriété (somme des cubes). $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$

Preuve. Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

➤ Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$, et d'autre part $\dfrac{0^2\,(0+1)^2}{4} = 0$. On en déduit que $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2 + 4\,(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\,(n^2+4n+4)}{4}$$

Soit finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}$, cette égalité signifiant que $P\,(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ $\boxed{\textbf{Conclusion} : \forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}}$

Question de cours 4 — Propriété (somme des termes d'une suite géométrique). Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. Démontrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

➤ Pour tout n entier naturel, notons $P(n)$ l'assertion : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

➤ **Initialisation** : pour $n = 0$, on a d'une part $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$, et d'autre part $u_0 \times \dfrac{1-q}{1-q} = u_0$. D'où $P(0)$ est vraie.

➤ **Hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n (hypothèse de récurrence). Alors :

$$\sum_{k=0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Soit finalement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, cette égalité signifiant que $P\,(n+1)$ est vraie, ce qui établit l'hérédité.

➤ $\boxed{\textbf{Conclusion} : \text{si } q \neq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$