Corrigé du DS de Mathématiques n^{0}1 — 9 septembre 2023

Exercice 1 — (Loi de Morgan).

Soient P et Q deux assertions logiques. On a la table de vérité suivante :

P	Q	$\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}$	$\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}}$	$\overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$
V	V	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V

Les assertions $\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}}$ et $\overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$ prennent simultanément les mêmes valeurs de vérité : elles sont donc logiquement équivalentes.

Conclusion. $\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$

Exercice 2 — (Quantificateurs)

Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que cette notation signifie que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite entre parenthèses en italique).

a/ $\exists\, C \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = C$ *(la fonction f est constante)*

$\forall\, C \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq C$

b/ $\exists\, T \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$ *(la fonction f est périodique)*

$\forall\, T \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) \neq f(x)$

c/ $\forall\, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, x \in [-1,1],\ (|x| \leqslant \alpha) \Longrightarrow (|f(x) - f(0)| \leqslant \beta)$

(la fonction f est continue en 0)

$\exists\, \beta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, x \in [-1,1],\ (|x| \leqslant \alpha) \vee (|f(x) - f(0)| > \beta)$

2/ Dans cette question, x et y désignent deux nombres réels arbitraires. Ecrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication

$$[f(x) = f(y)] \Longrightarrow [x = y]$$

Réciproque : $[x = y] \Longrightarrow [f(x) = f(y)]$
Négation : $[f(x) = f(y)] \wedge [x \neq y]$
Contraposée : $[x \neq y] \Longrightarrow [f(x) \neq f(y)]$

EXERCICE 3 — (SUITE).

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + 4^n$$

Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + 4^n$ par récurrence **double** sur n.

Notons $P(n)$ l'assertion : $u_n = 3^n + 4^n$.

➤ Initialisation ($n = 0$ et $n = 1$). D'une part : $u_0 = 2$ (énoncé) et d'autre part $3^0 + 4^0 = 2$. Donc $P(0)$ est vraie.

D'une part : $u_1 = 7$ (énoncé) et d'autre part $3^1 + 4^1 = 7$. Donc $P(1)$ est vraie.

➤ Hérédité. Supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies pour un certain entier naturel n. On a alors :

$$u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n \qquad \text{(selon l'énoncé)}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+2} = 7\left(3^{n+1} + 4^{n+1}\right) - 12\left(3^n + 4^n\right) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+2} = 21 \times 3^n + 28 \times 4^n - 12 \times 3^n - 12 \times 4^n$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+2} = 9 \times 3^n + 16 \times 4^n$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+2} = 3^2 \times 3^n + 4^2 \times 4^n$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+2} = 3^{n+2} + 4^{n+2}$$

Ce qui signifie que $P(n+2)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + 4^n$

EXERCICE 4 — **(LOGIQUE APPLIQUÉE)**

Dans cet exercice, on note C l'ensemble des élèves d'une classe de Sup du lycée Jean Bart, G l'ensemble des garçons de C, et F l'ensemble des filles de C.

On va considérer dans cet exercice des propositions concernant l'âge et/ou les relations d'amitié entre les éléments de C ; si x et y désignent deux élèves de C (on peut avoir éventuellement $x = y$), on notera :

- pour l'âge,

« x est plus jeune que y » par $x \leq y$

- pour les relations d'amitié,

« x aime y » par $x \heartsuit y$

et

« x n'aime pas y » par $x \not\heartsuit y$

Traduire les phrases suivantes par des propositions logiques avec quantificateurs :

1/ « personne n'aime personne »

$\forall x \in C, \; \exists y \in C, \; x \heartsuit y$

2/ « l'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque »

$\exists \, (x, y) \in C^2, \; (x \heartsuit y) \wedge (y \not\heartsuit x)$

3/ « chaque fois que deux garçons aiment une même fille, ces deux garçons ne s'aiment pas »

$\forall \, (x, y) \in G^2, \; \forall z \in F, \; [(x \heartsuit z) \wedge (y \heartsuit z)] \Longrightarrow [(x \not\heartsuit y) \wedge (y \not\heartsuit x)]$

Exercice 5 — **(Ensembles)**

Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E. On définit la **différence symétrique de** A **et** B (et on note $A\Delta B$) comme la partie de E suivante :

$$A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$

Etablir que :

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

On a :

$$\begin{aligned}
& A\Delta B &=& (A\backslash B)\cup(B\backslash A) \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& \left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& \left[A\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right]\cap\left[\overline{B}\cup\left(B\cap\overline{A}\right)\right] && \text{(distributivité)} \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& \left[(A\cup B)\cap\left(\underbrace{A\cup\overline{A}}_{=E}\right)\right]\cap\left[\left(\underbrace{\overline{B}\cup B}_{=E}\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\right] && \text{(re-distributivité)} \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& [(A\cup B)\cap E]\cap\left[E\cap\left(\overline{B}\cup\overline{A}\right)\right] \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& (A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} && \text{(loi de Morgan)} \\
\Longleftrightarrow\ & A\Delta B &=& (A\cup B)\setminus(A\cap B)
\end{aligned}$$

Conclusion. $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.