

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N^o1 — 9 SEPTEMBRE 2023

- *La durée du devoir est de 1 heure, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 5 exercices.*
- *N'oubliez pas de numérotter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question.*

Barème indicatif : chacun des exercices est noté sur 4pts

EXERCICE 1 — (LOI DE MORGAN)

Soient P et Q deux assertions logiques.

A l'aide d'une table de vérité, démontrer que :

$$\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

EXERCICE 2 — (QUANTIFICATEURS)

Dans cet exercice, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que cette notation signifie que f est une fonction définie sur \mathbb{R} , et à valeurs réelles.

1/ Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes (uniquement à titre indicatif, la traduction de chaque assertion est écrite entre parenthèses en italique).

a/ $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$ (*la fonction f est constante*)

b/ $\exists T \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$ (*la fonction f est périodique*)

c/ $\forall \beta \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [-1, 1], (|x| \leq \alpha) \implies (|f(x) - f(0)| \leq \beta)$

(la fonction f est continue en 0)

2/ Dans cette question, x et y désignent deux nombres réels arbitraires. Ecrire la réciproque, la négation, et la contraposée de l'implication

$$[f(x) = f(y)] \implies [x = y]$$

EXERCICE 3 — (SUITE)

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2, u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n + 4^n$$

EXERCICE 4 — (LOGIQUE APPLIQUÉE)

Dans cet exercice, on note C l'ensemble des élèves d'une classe de Sup du lycée Jean Bart, G l'ensemble des garçons de C , et F l'ensemble des filles de C .

On va considérer dans cet exercice des propositions concernant l'âge et/ou les relations d'amitié entre les éléments de C ; si x et y désignent deux élèves de C (on peut avoir éventuellement $x = y$), on notera :

- pour l'âge,

« x est plus jeune que y » par $x \leq y$

- pour les relations d'amitié,

« x aime y » par $x \heartsuit y$

et

« x n'aime pas y » par $x \not\heartsuit y$

Traduire les phrases suivantes par des propositions logiques avec quantificateurs :

1/ « personne n'aime personne »

2/ « l'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque »

3/ « chaque fois que deux garçons aiment une même fille, ces deux garçons ne s'aiment pas »

EXERCICE 5 — (ENSEMBLES)

Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E . On définit la **différence symétrique de A et B** (et on note $A\Delta B$) comme la partie de E suivante :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Etablir que :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$