Exercices 2 – Récurrence & Méthodes algébriques

Factorielle d'un entier naturel

Définition— Pour tout entier naturel n non nul, on définit la **factorielle de** n et on note $n!$ le produit de tous les entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

En outre, par convention : $0! = 1$.

Exemples : $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6\ldots$

Exercice 1. — Calculer ou simplifier les expressions suivantes :

1) $A = \dfrac{4!}{2!}$

2) $B = \dfrac{5! \times 4!}{3! \times 6!}$

3) $C = \dfrac{(n+1)!}{n!}$

4) $D = \dfrac{(n+1) \times n!}{(n+2)!}$

5) $E = \dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}$

6) $F = \dfrac{(n+1)! \times (n-1)!}{(n!)^2}$

Raisonnement par récurrence

Exercice 2. — Soit (u_n) la suite réelle donnée par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) A l'aide de la question précédente, conjecturer l'expression du terme général u_n en fonction de n. Puis démontrer cette conjecture.

Exercice 3. — Mêmes questions que dans l'exercice précédent avec la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) u_n$.

Exercice 4. — **(Suite de Wallis - Exo 15 de la feuille 1)**. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, u_n$.

Etablir que : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

Exercice 5. — Montrer par récurrence sur n la propriété suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Sommes

Exercice 6. — Calculer les sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$; $\quad S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} i$; $\quad S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} n$.

Exercice 7. — Parmi les formules ci-dessous, déterminer lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda+a_k)=\lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{d=1}^{n}b_d$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$

d) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_jb_j=\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{j=1}^{n}b_j$ e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a_j^N=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)^N$ f) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}$

Exercice 8. — Soit $q\in\mathbb{C}$, et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}q^k$.

Exercice 9. — Soit $q\in\mathbb{C}$. Calculer $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}q^{2k}$. **Exercice 10.** — Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$

Exercice 11. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,(k+2)$.

Exercice 12. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-k+1\right)(k+1)$.

Exercice 13. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)}$.

Exercice 14. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+2)}$.

Exercice 15. — Soit n un entier naturel. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}$. [1]

Exercice 16. — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$. Montrer que (u_n) est strictement croissante.

Exercice 17. — Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n=\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$. Etudier le sens de variation, puis prouver la convergence de cette suite.

Exercice 18. — Pour $q\in\mathbb{C}-\{1\}$ et $n\in\ \mathbb{N}$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kq^k$.

En calculant qS_n-S_n, déterminer la valeur de S_n.

1. On pourra déterminer trois réels a, b et c tels que : $\dfrac{1}{k\,(k+1)\,(k+2)}=\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}$.

Exercice 19. — Etablir que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

En déduire que pour tout entier naturel N non nul on a : $1 \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 2$.

Exercice 20. — 1) Prouver que pour tout entier non-nul n, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \dfrac{1}{n}$

2) En déduire que pour tout entier non-nul N, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geqslant \ln(N+1)$

3) En déduire la limite lorsque N tend vers $+\infty$ de $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Exercice 21. — Soit x un nombre réel différent de -1. Montrer que pour tout entier naturel n on a :

$$\frac{1}{1+x} = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\right] + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

Exercice 22. — Calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$.

Exercice 23. — Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i2^j$.

Exercice 24. — Soit z un complexe quelconque. Calculer $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z^{i+j}$ (c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} z^{i+j}$)

Produits

Exercice 25. — Soit n un entier $\geqslant 2$. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, puis le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Exercice 26. — Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le produit $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

Factorielles

Exercice 27. — $\star$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 28. — $\star$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k \times k!)$

Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Exercice 29. — Soit n un entier naturel. Calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$

Exercice 30. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$

Exercice 31. — 1) Soient n et p dans $\mathbb{N}$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que : $p\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ p-1 \end{pmatrix}$

2) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = n2^{n-1}$

Exercice 32. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit x un réel quelconque. Calculer : $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Exercice 33. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit x un réel quelconque. Calculer : $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-x)^{3n-2k} x^k$

Extraits de DS

Exercice 34. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{2}{3}$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}\, u_n$$

1/ Calculer les valeurs de u_1 et u_2.

2/ Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{2n+3}\,(n+2)!\; n!}{(2n+4)!}$$

Exercice 35. — Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{n\,(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$