MPSI – Colle 1 (18 au 22 septembre 2023) : Logique et ensembles – Méthodes algébriques

Chapitre 1 : Eléments de logique et de théorie des ensembles

1 – Logique

Définitions : assertion logique (ou proposition mathématique), propositions logiquement équivalentes, table de vérité, proposition contraire $\neg P$ (ou *non* P ou $\overline{P}$), proposition $P \vee Q$, proposition $P \wedge Q$. Les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont distributives l'une par rapport à l'autre. Principe du tiers exclus (P est vraie ou fausse), principe de non-contradiction (P ne peut être à la fois vraie et fausse).

Lois de Morgan : $non\,(P \vee Q) = non\,P \wedge non\,Q$ et $non\,(P \wedge Q) = non\,P \vee non\,Q$

Quantificateurs. Règles de négation : $non\,(\forall\, x \in E, A\,(x)) \equiv (\exists\, x \in E, nonA\,(x))$ et $non\,(\exists\, x \in E, A\,(x)) \equiv (\forall\, x \in E, nonA\,(x))$

2 – Ensembles

Définitions d'ensemble, d'inclusion et d'égalité entre deux ensembles. Règle de double inclusion : $A = B$ SSI $A \subset B$ et $B \subset A$. L'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathscr{P}\,(E)$ (rq : l'ensemble vide $\emptyset$ et E appartiennent toujours à $\mathscr{P}\,(E)$).

Opérations sur les ensembles : soient E un ensemble, A et B deux éléments de $\mathscr{P}\,(E)$: définition de $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $\bar{A} = E \backslash A$.

Propriétés : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ("lois de Morgan pour les ensembles").

Définition du produit cartésien $E \times F$; notation $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{\text{n fois}}$.

3 – Exemples de démonstrations mathématiques

Démonstration d'une implication ; d'une équivalence (par double implication) ; par récurrence (simple ou double) ; par l'absurde (ex : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) ; par analyse-synthèse (décomposition "paire + impaire").

Chapitre 2 : Méthodes algébriques

1 – Brefs rappels sur les suites

Définition. Cas particuliers des suites arithmétiques et géométriques.

2 – Sommes

Somme : notation $\sum\limits_{i \in I} a_i$ pour (a_n) une suite et I un ensemble d'indices. En pratique on a souvent : $I = [\![0 ; n]\!]$ et on note alors $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i$ la somme "$a_0 + a_1 + \cdots + a_n$".

Propriétés des sommes : soient (a_n) et (b_n) deux suites, λ un réel.

➤ Linéarité : $\sum\limits_{k=n}^{p} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=n}^{p} a_k + \sum\limits_{k=n}^{p} b_k$ et $\sum\limits_{k=n}^{p} (\lambda a_k) = \lambda \sum\limits_{k=n}^{p} a_k$

➤ "Relation de Chasles" : $\sum\limits_{k=n}^{p} a_k = \sum\limits_{k=n}^{m} a_k + \sum\limits_{k=m+1}^{p} a_k$

Quelques sommes remarquables

➤ Somme des termes d'une suite géométrique. Pour (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$: $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

➤ Somme des premiers entiers. $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$

➤ Somme des premiers carrés. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

➤ Somme des premiers cubes. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\right)^2$

➤ Sommes télescopiques : $\sum\limits_{k=n}^{p} (a_{k+1} - a_k) = a_{p+1} - a_n$

3 – Produits

Produit : notation $\prod\limits_{i \in I} a_i$ pour (a_n) une suite et I un ensemble d'indices. En pratique on a souvent : $I = [\![0 ; n]\!]$ et on note alors $\prod\limits_{i=0}^{n} a_i$ le produit "$a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$".

Propriétés des produits : soient (a_n) et (b_n) deux suites, λ un réel.

➤ $\prod\limits_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod\limits_{k=p}^{n} a_k \times \prod\limits_{k=p}^{n} b_k$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^n \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$

➤ "Relation de Chasles" : $\displaystyle\prod_{k=n}^{p} a_k = \prod_{k=n}^{m} a_k \times \prod_{k=m+1}^{p} a_k$

➤ Produits télescopiques : $\displaystyle\prod_{k=n}^{p} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{p+1}}{a_n}$

Définition de factorielle : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$ et $0! = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n! = (n-1)! \times n$.

4 – Coefficients binomiaux et binôme de Newton

Au programme de la colle 2.

Questions de cours

➤ **Décomposition paire + impaire (existence)** : toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire définies sur $\mathbb{R}$

➤ **Somme des cubes** : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$

➤ **Propriété (somme des termes d'une suite géométrique)** : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, avec $q \neq 1$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

➤ **Exo sur la récurrence double, extrait du DS1** : soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 7$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$$

Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 3^n + 4^n$

Objectifs de la semaine :

➤ **Connaître son cours**, ce qui signifie connaître les définitions, les énoncés des théorèmes, et notamment les sommes remarquables ; avoir compris les exercices vus en cours/TD.

➤ Pour cette semaine, et pour la suite de l'année : avoir compris le principe des $\neq$ **méthodes de démonstration** (compétence qui sera archi-développée en cours d'année, où - presque… - tous les résultats seront prouvés).

➤ En particulier, être au point sur la **méthode du raisonnement par récurrence** (simple ou double).