Corrigé du problème de la semaine 1

Exercice 1 — (Fonctions hyperboliques) 1) **Etude préliminaire** a) Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. L'inéquation $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ a donc pour solution $\mathbb{R}$.

b) $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{2x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$. L'inéquation $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ a donc pour solution $\mathbb{R}_+$.

2) **Etude de la fonction sh** a) On commence par observer que sh est définie sur un ensemble symétrique par rapport à zéro (puisque sh est définie sur $\mathbb{R}$). En outre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}\,(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x}{2} = -\left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) = -\mathrm{sh}\,(x)$$ Conclusion : la fonction sh est impaire.

2) Les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ (énoncé !). La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, soit encore : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$.

➤ Clairement : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$.

D'après ce qui précède, on a $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$. Or la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1-a). Il s'ensuit que sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variation ci-contre.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Par ailleurs, la tangente T_S admet pour équation cartésienne : $y = \mathrm{sh}'(0)x + \mathrm{sh}(0)$, c'est-à-dire $y = x$.

➤ **Etude de la fonction ch** De nouveau, on peut observer que ch est définie sur un ensemble symétrique par rapport à zéro ($\mathbb{R}$). En outre :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x}{2} = \mathrm{ch}\,(x)$$ Conclusion : la fonction ch est paire.

➤ La fonction ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, et : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, soit encore : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.

➤ Clairement : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.

D'après ce qui précède, on a $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$. Or la fonction sh est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question 1-b). Par parité, il s'ensuit que ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. On en déduit le tableau de variation ci-contre.

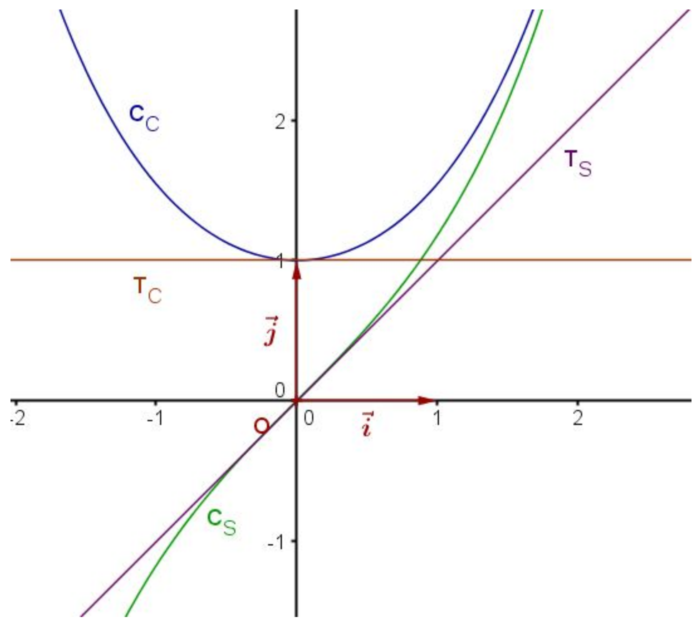
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Par ailleurs, la tangente T_C admet pour équation cartésienne : $y = \mathrm{ch}'(0)x + \mathrm{ch}(0)$, c'est-à-dire $y = 1$.

3 & 4) **Représentations** a) ➤ *Position relative de $\mathscr{C}_C$ et T_C* : une équation cartésienne de T_C est $y = 1$ d'après 2). D'autre part, d'après l'étude des variations de ch, on sait que $\mathrm{ch}\,(x) > 1$ pour tout réel x non-nul ; et $\mathrm{ch}\,(0) = 1$. On en déduit que **$\mathscr{C}_C$ est au-dessus de T_C sur $\mathbb{R}^*$; et $\mathscr{C}_C$ et T_C ont un unique point d'intersection de coordonnées $(0; 1)$**.

➤ *Position relative de $\mathscr{C}_S$ et T_S* : une équation cartésienne de T_S est $y = x$ d'après 2). On doit donc déterminer le signe de $\Delta(x) = \mathrm{sh}(x) - x$ sur $\mathbb{R}$. Il n'est pas évident d'obtenir directement le signe de cette expression, et on peut donc penser à étudier ses variations. Après avoir observé que la fonction Δ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient aisément : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Delta'(x) = \mathrm{ch}(x) - 1$. D'après la question 2), on en déduit que $\Delta'(x) > 0$ pour tout réel x non-nul (et $\Delta(0) = 0$).

La fonction Δ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme en outre $\Delta(0) = 0$, on en déduit que Δ est strictement positive (*resp.* strictement négative, *resp.* nulle) sur $\mathbb{R}_+^*$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_-^*$, *resp.* en 0). Par conséquent, **$\mathscr{C}_S$ est au-dessus (*resp.* est en-dessous, *resp.* coupe) la droite T_S sur $\mathbb{R}_+^*$ (*resp.* sur $\mathbb{R}_-^*$, en l'origine)**.



➤ *Position relative de $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_S$* : pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x}$; d'où pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) > 0$. On en déduit que **$\mathscr{C}_C$ est au-dessus de $\mathscr{C}_S$ sur $\mathbb{R}$**.

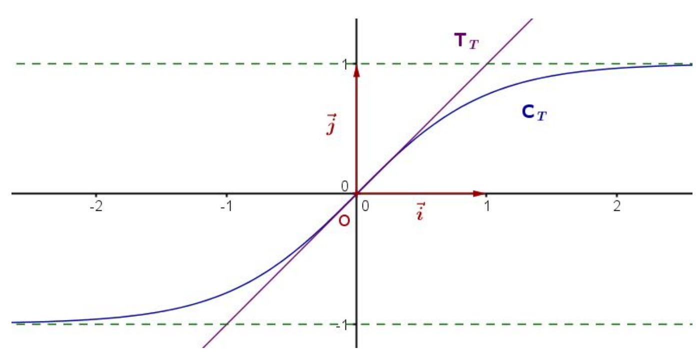
Ce travail accompli, l'objectif principal n'est pas tellement que vous traciez le plus précisément possible les courbes $\mathscr{C}_C$ et $\mathscr{C}_S$, mais surtout que le graphique soit cohérent avec les éléments obtenus précédemment : sens de variation, parité, positions relatives des courbes entre elles et par rapport à leurs tangentes respectives.

5) La fonction $x \longmapsto \mathrm{th}(x) = \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$ est **définie sur $\mathbb{R}$**, puisque son dénominateur ne s'annule pas (la fonction ch prend des valeurs supérieures ou égales à 1). L'ensemble de définition de th est donc symétrique par rapport à zéro, et la fonction th est **impaire** (quotient d'une fonction impaire et d'une fonction paire). La fonction th est également **dérivable sur $\mathbb{R}$** d'après les théorèmes généraux sur la dérivabilité, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \text{ d'où : } \boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \quad \text{ou} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x)}$$

On peut déjà en déduire que la fonction th est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$**.

Enfin : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{th}(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$ d'où : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{th}(x) = 1}$ et comme th est impaire, on a $\boxed{\displaystyle\lim_{x\longrightarrow-\infty} \mathrm{th}(x) = -1}$.



Ci-contre est tracée la courbe représentative de la fonction th (on a également fait apparaître les asymptotes d'équations $y = 1$ et $y = -1$, ainsi que la tangente à l'origine d'équation $y = x$).

6) a) On peut commencer par se faire une idée de la réponse à l'aide de ce qui précède. Explicitement, d'après le tableau de variation de ch, et en observant que la fonction ch est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, l'équation $\mathrm{ch}(x) = \lambda$ possède exactement deux solutions lorsque $\lambda > 1$, une unique solution pour $\lambda = 1$, et aucune solution pour $\lambda = 0$.

Passons maintenant à la résolution algébrique. Soit λ un réel. Alors : $[\text{ch}(x) = \lambda] \Longleftrightarrow \left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \lambda\right] \Longleftrightarrow$ $[e^x + e^{-x} = 2\lambda] \Longleftrightarrow [e^{2x} + 1 = 2\lambda e^x]$

$$\Longleftrightarrow [e^{2x} - 2\lambda e^x + 1 = 0]$$

On pose alors : $X = e^x$. L'équation précédente se réécrit : $X^2 - 2\lambda X + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 - 1)$. On distingue alors 3 cas (puisque l'on résoud cette équation du second degré dans $\mathbb{R}$) :

➤ <u>1er cas : si $|\lambda| > 1$</u>. Alors $\Delta > 0$, donc l'équation du second degré possède exactement deux solutions : $\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$. Mais ces deux racines sont strictement positives lorsque $\lambda > 1$, et strictement négatives lorsque $\lambda < -1$. On en déduit que l'équation (E_λ) possède deux solutions : $\ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)$ lorsque $\lambda > 1$, et aucune lorsque $\lambda < -1$.

➤ <u>2ème cas : si $\lambda = 1$</u>. Alors $\Delta = 0$, donc l'équation du second degré possède exactement une solution : $\lambda = 1$. On en déduit que l'équation (E_λ) possède dans ce cas une unique solution : 0.

➤ <u>3ème cas : si $|\lambda| < 1$</u>. Alors $\Delta < 0$, donc l'équation du second degré ne possède aucune solution réelle, et a fortiori l'équation (E_λ) n'en possède aucune dans $\mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : pour tout réel $\lambda > 1$, l'équation $\text{ch}(x) = \lambda$ possède deux solutions $\ln\left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)$ lorsque $\lambda > 1$, une unique solution qui est 0 lorsque $\lambda = 1$, et aucune pour $\lambda < 1$.

b) D'après le tableau de variation de sh, et en observant que la fonction sh est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$, l'équation $\text{sh}(x) = \lambda$ possède exactement une solution pour tout réel λ. Dans ce contexte, on dit que la fonction sh réalise une **bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$**.

Soit λ un réel. Alors : $[\text{sh}(x) = \lambda] \Longleftrightarrow \left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \lambda\right] \Longleftrightarrow [e^x - e^{-x} = 2\lambda] \Longleftrightarrow [e^{2x} - 1 = 2\lambda e^x]$

$$\Longleftrightarrow [e^{2x} - 2\lambda e^x - 1 = 0]$$

On pose alors : $X = e^x$. L'équation précédente se réécrit : $X^2 - 2\lambda X - 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4(\lambda^2 + 1)$, qui est un réel strictement positif. L'équation (en X) possède donc deux solutions :

$$X_1 = \frac{2\lambda + \sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{2\lambda - \sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2} \quad \text{c'est-à-dire : } X_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2+1} \text{ et } X_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2+1}$$

De ces deux réels, seul X_1 est un réel strictement positif. En d'autres termes, l'équation $e^x = X_2$ ne possède aucune solution dans $\mathbb{R}$ (elle en possède en revanche dans $\mathbb{C}$, cf DS $n^0 2$).

Ainsi, x est solution de l'équation (F_λ) si et seulement si $e^x = X_1$, c'est-à-dire si et seulement si : $x = \ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}\right)$.

<u>Conclusion</u> : pour tout réel λ, l'équation $\text{sh}(x) = \lambda$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$ qui est $\ln\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2+1}\right)$.