Devoir surveillé de Mathématiques n^{0}2 — 16 septembre 2023

- *La durée du devoir est de 1 heure, les calculatrices sont interdites.*
- *Le sujet est rédigé sur 2 pages, et est constitué de 5 exercices.*
- *Pensez à encadrer ou souligner les résultats à la fin de chaque question, et à accorder du soin à la présentation et à la rédaction.*

Barème indicatif : Ex1 : 6pts — Ex2 : 3pts — Ex3 : 4pts — Ex4 : 6pts — Ex5 : 6pts

Exercice 1 — (Applications du cours)

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^k$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k$.

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S_3 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

3/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $S_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{4k}$.

Exercice 2 — (Sommes de référence)

Soit n un entier naturel. On pose :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(4k^3 + 6k^2 + 2k\right)$$

Etablir que :

$$S = n\,(n+1)^2\,(n+2)$$

Exercice 3 — (Suite récurrente)

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{16\,(2n+3)}{n+1}\, u_n$$

Démontrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{2^{\,3n}\,(2n+2)!}{n!\,(n+1)!}$$

Exercice 4 — (Sommes niveau 2)

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. Calculer : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$.

2/ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{2kx}$.

Etablir que :

$$S_2 = 2^{\,n}\, \mathrm{e}^{nx}\, \mathrm{ch}^n\,(x)$$

Exercice 5 — (Coefficients binomiaux)

Lorsque l'on considère une ligne de rang pair du triangle de Pascal, on peut observer que le plus grand coefficient binomial est situé au milieu de la ligne.

*Par exemple, la ligne "2" du triangle de Pascal est : 1 – **2** – 1 ; et la ligne "4" est : 1 – 4 – **6** – 4 – 1.*

L'objectif de cet exercice est de donner la preuve de cette observation.

Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Pour tout entier naturel k, on pose :

$$u_k = \binom{2n}{k}$$

1/ Donner sans justification les valeurs de u_0, u_1, et u_2.

2/ Que vaut u_k lorsque $k \geqslant 2n+1$?

3/ Soit $k \in [\![\, 0, 2n-1 \,]\!]$. Etablir que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2n-k}{k+1}$$

4/ En déduire que :

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \quad \text{et} \quad u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant u_{2n}$$