

CORRIGÉ DU DS DE MATHÉMATIQUES N°2 — 16 SEPTEMBRE 2023

EXERCICE 1 — (APPLICATIONS DU COURS)

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^n 5^k$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 5^k$.

La somme S_1 est géométrique de raison $5 \neq 1$. D'après le cours : $S_1 = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5}$

Conclusion. $S_1 = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$

D'après le binôme de Newton : $S_2 = (5 + 1)^n$. **Conclusion.** $S_2 = 6^n$

2/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer : $S_3 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

On a : $S_3 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \underset{\text{som. télesc.}}{=} \ln(n+1) - \ln(2)$

Conclusion. $S_3 = \ln \left(\frac{n+1}{2} \right)$

3/ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer : $S_4 = \sum_{k=0}^n x^{4k}$.

On a : $S_4 = \sum_{k=0}^n (x^4)^k$. La somme S_4 est donc géométrique de raison x^4 . On distingue deux cas suivant que x^4 est égal à 1 ou non.

Si $x^4 = 1$ ($\iff x = \pm 1$). Alors : $S_4 = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$.

Si $x^4 \neq 1$ ($\iff x \neq \pm 1$). Alors : $S_4 = \frac{1 - (x^4)^{n+1}}{1 - x^4}$.

Conclusion. $S_4 = \begin{cases} \frac{1 - (x^4)^{n+1}}{1 - x^4} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \\ n + 1 & \text{si } x = \pm 1 \end{cases}$

EXERCICE 2 — (SOMMES DE RÉFÉRENCE)

Soit n un entier naturel. On pose : $S = \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 2k)$.

Etablir que : $S = n(n+1)^2(n+2)$

Par linéarité de la somme : $S = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 2 \sum_{k=0}^n k$

D'après le cours : $S = 4 \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2}$

$$\iff S_4 = n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)$$

$$\iff S_4 = n(n+1)(n(n+1) + 2n + 1 + 1)$$

$$\iff S_4 = n(n+1)(n(n+1) + 2(n+1))$$

$$\iff S_4 = n(n+1)((n+1)(n+2))$$

Conclusion. $S = n(n+1)^2(n+2)$

EXERCICE 3 — (SUITE RÉCURRENTÉ)

On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = 2$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{16(2n+3)}{n+1} u_n$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2^{3n} (2n+2)!}{n! (n+1)!}$$

Pour tout n entier naturel, posons $P(n) : "u_n = \frac{2^{3n} (2n+2)!}{n! (n+1)!}"$

► **Initialisation** ($n = 0$). D'après l'énoncé : $u_0 = 2$. Et : $\frac{2^0 (2)!}{0! 1!} = 2$.

D'où $P(0)$ est vraie.

► **Hérédité.** Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier naturel n . On a :

$$u_{n+1} = \frac{16(2n+3)}{n+1} u_n \quad (\text{énoncé})$$

$$\iff u_{n+1} = \frac{16(2n+3)}{n+1} \times \frac{2^{3n} (2n+2)!}{n! (n+1)!} \quad (\text{hypothèse de récurrence})$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} = \frac{2^{3n+4} (2n+3)!}{(n+1)! (n+1)!} \times \frac{2n+4}{2n+4}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} = \frac{2^{3n+4} (2n+4)!}{(n+1)! (n+1)! 2(n+2)}$$

$$\Longleftrightarrow u_{n+1} = \frac{2^{3n+3} (2n+4)!}{(n+1)! (n+2)!}$$

Ce qui signifie que $P(n+1)$ est vraie, et établit l'hérédité de la propriété.

► **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2^{3n} (2n+2)!}{n! (n+1)!}$

EXERCICE 4 — (SOMMES NIVEAU 2)

Les questions de cet exercice sont **indépendantes**.

1/ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. Calculer : $S_1 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right)$.

$$\text{On a : } S_1 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k+2}{k} \right) = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k))$$

On réécrit alors diaboliquement la somme S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1) + \ln(k+1) - \ln(k))$$

$$\text{D'où : } S_1 = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) + (\ln(k+1) - \ln(k))$$

$$\Longleftrightarrow S_1 = \sum_{k=2}^n (\ln(k+2) - \ln(k+1)) + \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \quad (\text{linéarité de la somme})$$

$$\Longleftrightarrow S_1 = \ln(n+2) - \ln(3) + \ln(n+1) - \ln(2) \quad (\text{sommes télécopiques})$$

$$\text{Conclusion. } S_1 = \ln \left(\frac{(n+2)(n+1)}{6} \right)$$

2/ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx}$. Etablir que : $S_2 = 2^n e^{nx} \text{ch}^n(x)$

$$\text{On a : } S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{2kx} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{2x})^k.$$

Selon le binôme de Newton : $S_2 = (e^{2x} + 1)^n$.

$$\text{D'où : } S_2 = [e^x (e^x + e^{-x})]^n = [e^x 2\text{ch}(x)]^n = e^{nx} 2^n \text{ch}^n(x).$$

$$\text{Conclusion. } S_2 = 2^n e^{nx} \text{ch}^n(x)$$

EXERCICE 5 — (COEFFICIENTS BINOMIAUX)

Lorsque l'on considère une ligne de rang pair du triangle de Pascal, on peut observer que le plus grand coefficient binomial est situé au milieu de la ligne.

Par exemple, la ligne "2" du triangle de Pascal est : 1 – 2 – 1 ; et la ligne "4" est : 1 – 4 – 6 – 4 – 1.

L'objectif de cet exercice est de donner la preuve de cette observation.

Tout au long de cet exercice, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Pour tout entier naturel k , on pose :

$$u_k = \binom{2n}{k}$$

1/ Donner sans justification les valeurs de u_0 , u_1 , et u_2 .

Observons que d'après l'énoncé, $2n \geq 2$. On a donc, d'après le cours :

$$u_0 = \binom{2n}{0} = 1 ; \quad u_1 = \binom{2n}{1} = 2n ; \quad u_2 = \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2}$$

Conclusion. $u_0 = 1 ; \quad u_1 = 2n ; \quad u_2 = n(2n-1)$

2/ Que vaut u_k lorsque $k \geq 2n+1$?

D'après le cours : $\binom{2n}{k} = 0$ si $k > 2n$.

Conclusion. $u_k = 0$ lorsque $k \geq 2n+1$.

3/ Soit $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Etablir que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2n-k}{k+1}$$

Soit $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. On a : $u_{k+1} = \binom{2n}{k+1}$ et $u_k = \binom{2n}{k}$.

Or, d'après le cours : $u_{k+1} = \frac{(2n)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}$ et $u_k = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$.

On en déduit que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2n)!k!(2n-k)!}{(k+1)!(2n-k-1)!(2n)!} = \frac{k!(2n-k)!}{(k+1)!(2n-k-1)!}$$

Conclusion. $\forall k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2n-k}{k+1}$

4/ En déduire que :

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \quad \text{et} \quad u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots \geq u_{2n}$$

Pour tout entier $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, le nombre u_k est un entier strictement positif.

Il s'ensuit que pour tout entier $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, on a :

$$[u_{k+1} \geq u_k] \iff \left[\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1 \right]$$

On en déduit, avec la question précédente, que :

$$u_{k+1} \geq u_k$$

$$\iff \frac{2n-k}{k+1} \geq 1$$

$$\iff 2n-k \geq k+1$$

$$\iff 2k+1 \leq 2n$$

$$\iff k \leq n - \frac{1}{2}$$

$$\iff k \leq n-1$$

$$\text{En résumé : } [u_{k+1} \geq u_k] \iff [k \leq n-1]$$

Il s'ensuit que : $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n$ et $u_n \geq u_{n+1} \geq \cdots \geq u_{2n}$