Chapitre 3 — Trigonométrie

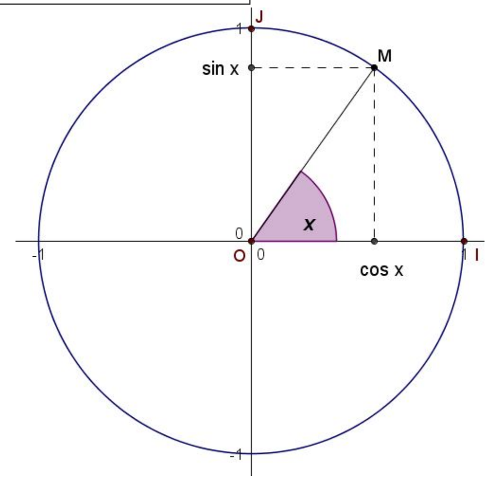
I — Définitions et premières propriétés des fonctions trigonométriques

Définitions 1. *On se place dans le plan muni d'un repère orthonormal* $(O; I, J)$.

Soit x un nombre réel.

1) On appelle ***point image*** *du réel x le point M du cercle trigonométrique tel qu'une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ soit égale à x.*

2) On appelle ***cosinus du réel*** *x (resp.* ***sinus du réel*** *x) et on note $\cos x$ (resp. $\sin x$) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point M.*



Remarque : il résulte de la définition que les fonctions cosinus et sinus sont **définies sur** $\mathbb{R}$ tout entier.

Propriété 1 ("bornitude"). *Les fonctions cosinus et sinus sont bornées sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, ce sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1; 1]$:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \begin{cases} -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ \\ -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} : \begin{cases} |\cos x| \leqslant 1 \\ \\ |\sin x| \leqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration : tout point appartenant au cercle trigonométrique a une abscisse et une ordonnée comprise entre -1 et 1. □

Propriété 2 (périodicité). *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques. En d'autres termes :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases}$$

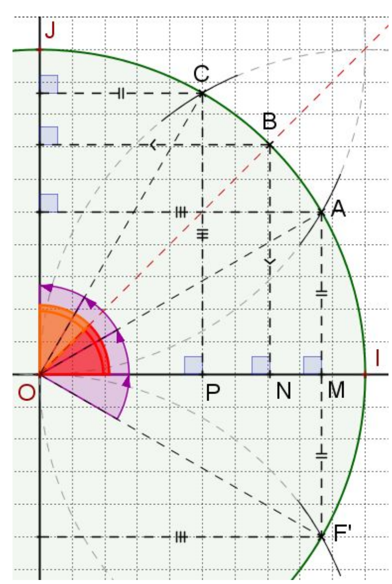
Démonstration : Soit x un nombre réel. Les réels x et $(x + 2\pi)$ ont la même image sur le cercle trigonométrique. □

Propriété 3 (parité). *La fonction cosinus est paire, et la fonction sinus est impaire. En d'autres termes :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin x$$

Démonstration : Soit x un nombre réel. Les points images de x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. □

Propriété 4 (valeurs remarquables). *Le graphique ci-contre représente une partie du cercle trigonométrique. Sur celui-ci, on a placé les points I, A, B, C et J, images respectives des réels 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$. On appelle valeurs remarquables les images de ces réels par les fonctions trigonométriques.*



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

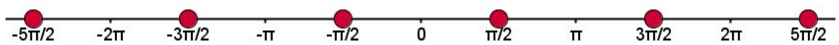
Démonstration : C'est un très amusant petit exercice de géométrie élémentaire ! □

Remarque : on observe en particulier que $\cos x = 0$ si et seulement si $x = \pm\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, soit si et seulement si $x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ (ou

Définition 2. *Soit x un nombre réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.*[1] *On appelle* ***tangente du réel*** *x et on note $\tan x$ le réel :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Remarque : il résulte de cette définition que la fonction tangente est définie sur l'ensemble : $\mathscr{D}_{\tan} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$. On observera que cet ensemble est symétrique par rapport à zéro ; sur le dessin suivant, l'ensemble $\mathscr{D}_{\tan}$ est en effet constitué de la droite réelle "privée des points rouges".



Propriété 5 (périodicité). *La fonction tangente est π-périodique. En d'autres termes :*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \tan(x+\pi) = \tan x$$

Démonstration : Laissée en exercice. □

Propriété 6 (parité). *La fonction tangente est impaire. En d'autres termes :*

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_{\tan},\ \tan(-x) = -\tan x$$

Démonstration : Laissée en exercice. □

Propriété 7 (valeurs remarquables). *Les valeurs remarquables de la fonction tangente sont données dans le tableau ci-dessous :*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non-définie

Démonstration : c'est une conséquence directe de la définition de la fonction tan, et de la propriété 4. □

II — Etude des fonctions trigonométriques

➤ La fonction cosinus

☞ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

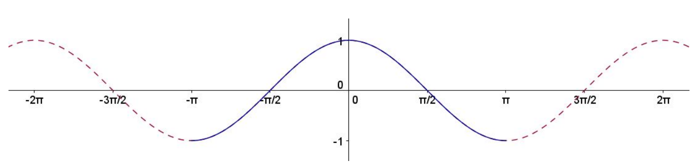
☞ **Dérivabilité** : la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos' x = -\sin x$$

☞ **Tableau de variation** :

x	$-\pi$		0		π
Signe de $-\sin x$		$+$	0	$-$	
Variations de cos	-1	↗	1	↘	-1

☞ **Courbe représentative** :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (cf parité). De plus, pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur $[-\pi;\pi]$ puis d'appliquer des translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

➤ La fonction sinus

☞ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R}$

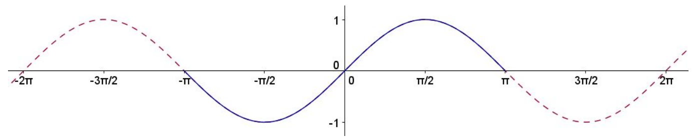
☞ **Dérivabilité** : la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin' x = \cos x$$

☞ **Tableau de variation** :

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
Signe de $\cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de sin	0	↘	-1	↗	1	↘	0

☞ **Courbe représentative** :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère (cf parité). Comme pour la fonction cosinus, pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur $[-\pi;\pi]$ puis d'appliquer des translations de vecteur $2k\pi\overrightarrow{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

➤ La fonction tangente

☞ **Ensemble de définition** : $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

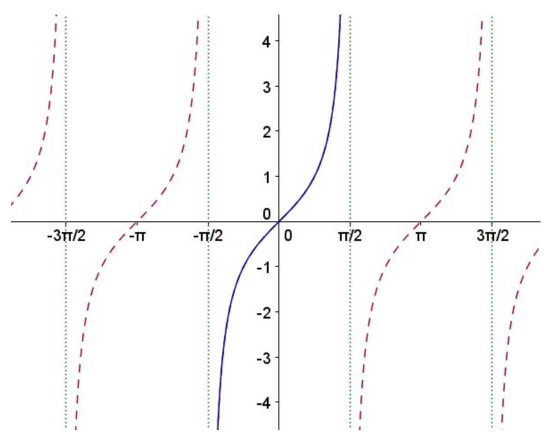
☞ **Dérivabilité** : la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi],\ \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

☞ **Tableau de variation** :

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
Signe de $tan'x$		$+$	
Variations de tan	$-\infty$	↗	$+\infty$

☞ **Courbe représentative** :



Cette courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère (cf parité). Pour obtenir la courbe complète, il suffit de la tracer sur $]-\pi/2;\pi/2[$ puis d'appliquer des translations de vecteur $k\pi\overrightarrow{i}$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

III — Formulaire de trigonométrie circulaire

Voir formulaire joint.